

Interferometro di Michelson – coerenza temporale – gruppo 1b Gabbi Mazzola

Finalità dell'esperienza:

- 1) Determinazione del rapporto moltiplicativo tra vite micrometrica e spostamento dello specchio
- 2) Misurazione della lunghezza d'onda di un laser incognito
- 3) Misurazione della lunghezza d'onda della radiazione emessa da una lampada al sodio
- 4) Osservazione dei battimenti del sodio e determinazione delle lunghezze d'onda corrispondenti al "doppietto"

Cenni teorici

Considerate due sorgenti di radiazione elettromagnetica monocromatica con segnali isofrequenziali, coerenti (la differenza di fase si mantiene costante nel tempo) e aventi campi elettrici oscillanti nella stessa direzione dello spazio, è allora possibile il verificarsi del fenomeno di interferenza: quando i segnali si sovrappongono, è osservabile una modulazione dell'intensità luminosa, che non risulta la semplice somma dell'intensità delle componenti delle due sorgenti. In particolare, si può ricordare la legge generale che regola questo fenomeno, utile per definire massimi e minimi di intensità

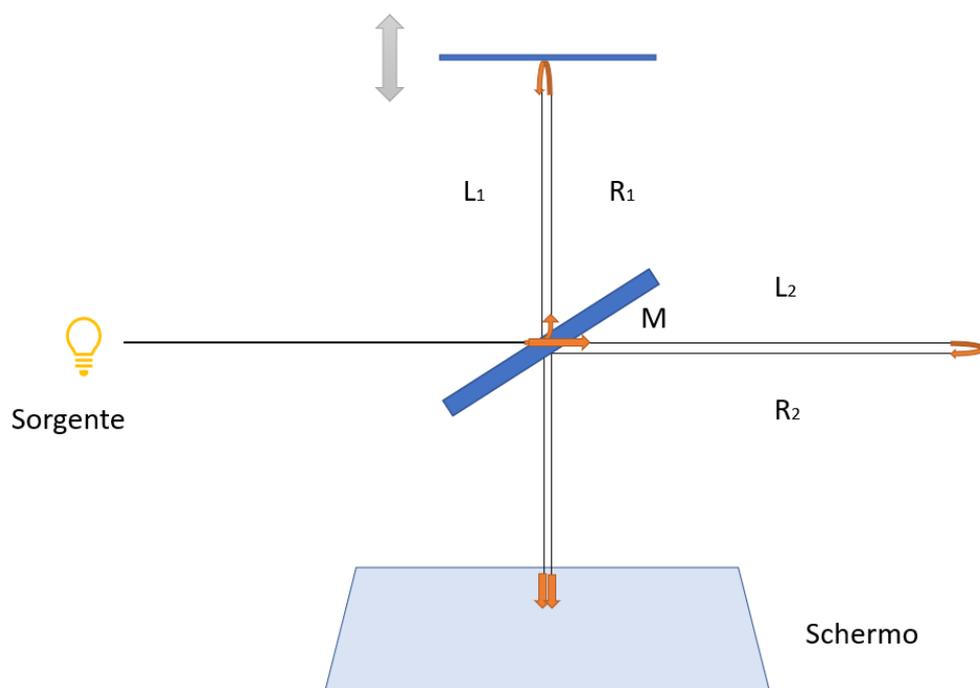
$$I_{risultante} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\varphi)$$

con I_1 e I_2 l'intensità, rispettivamente, del primo e del secondo segnale, e $\Delta\varphi$ lo sfasamento tra i segnali.

$$I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \leftrightarrow \cos(\Delta\varphi) = +1 \leftrightarrow \Delta\varphi = 0 \pm 2n\pi$$

$$I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \leftrightarrow \cos(\Delta\varphi) = -1 \leftrightarrow \Delta\varphi = \pi \pm 2n\pi$$

Nel caso dell'interferometro di Michelson, il fenomeno di interferenza si ottiene per sfasamento tra due segnali che percorrono cammini ottici differenti e che quindi giungono sullo schermo in tempi diversi. Infatti, l'apparato sperimentale è composto da una singola sorgente (monocromatica e coerente) e da un sistema di specchi, come riportato in figura:



La radiazione emessa dalla sorgente incide su uno specchio "semiriflettente", in grado cioè di trasmettere una parte dei raggi incidenti e riflettere l'altra parte. I due "nuovi" fasci (riflesso e trasmesso), che possiamo chiamare per comodità R1 e R2 percorrono cammini in due differenti direzioni dello spazio: R1 viene riflesso su uno specchio mobile, posto a una distanza L1 variabile, dove viene riflesso per tornare allo specchio semiriflettente, mentre R2 viene trasmesso a uno specchio fisso posto a una distanza L2, dove viene riflesso e torna allo specchio semiriflettente. R1 e R2, giunti allo specchio semiriflettente, verranno in parte trasmessi e in parte riflessi: la figura di interferenza che visualizziamo sullo schermo è dovuta a R1 trasmesso e R2 riflesso.

Questi due fasci hanno infatti subito uno sfasamento in conseguenza alla differenza di cammino ottico percorso. In particolare, la differenza di cammino geometrico è pari a

$$\Delta L = 2(L2 - L1)$$

e la differenza di cammino ottico risulta

$$\delta = n \Delta L = n 2(L2 - L1)$$

con n l'indice di rifrazione del mezzo in cui si propaga la radiazione.

Allora, la differenza di fase sarà

$$D = \frac{2\pi}{\lambda} \delta = \frac{2\pi}{\lambda} n 2(L2 - L1)$$

Si avranno allora massimi e minimi di interferenza rispettivamente per

$$2m\pi = \frac{2\pi}{\lambda} n 2(L2 - L1) \Rightarrow m\lambda = n 2(L2 - L1) \quad m = 0,1,2 \dots$$

$$(2m + 1)\pi = \frac{2\pi}{\lambda} n 2(L2 - L1) \Rightarrow \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda = n 2(L2 - L1) \quad m = 0,1,2 \dots$$

Nel nostro caso, l'indice di rifrazione del mezzo di propagazione dovrebbe comprendere non solo quello dell'aria (n=1), ma anche quello dello specchio semiriflettente. È tuttavia possibile "eliminare" questo contributo ponendo una lastra di compensazione in vetro del medesimo spessore dello specchio semiriflettente sul cammino di R2.

Come già accennato in precedenza, uno dei due specchi è mobile (indicato anche in figura) ed è possibile traslarlo per modificare la lunghezza L1: così facendo si osserva, per un punto fissato dello schermo, l'alternanza di massimi e minimi di intensità, creando l'illusione di una traslazione (del tutto apparente) della figura di interferenza di un certo numero di frange.

$$\Delta m \lambda = 2 \Delta(L2 - L1)$$

$$\Delta \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda = 2 \Delta(L2 - L1)$$

Il movimento dello specchio è possibile grazie ad una leva che collega lo stesso a una vite micrometrica: lo spostamento che si registra sulla vite non è però corrispondente allo spostamento effettivo dello specchio, ma esiste un rapporto di leva che può essere stimato. Infatti, definito Δa lo spostamento della vite, si avrà un rapporto di leva pari a

$$h = \frac{\Delta(L2 - L1)}{\Delta a} \Rightarrow \Delta(L2 - L1) = h \Delta a$$

Sostituendo nella relazione precedentemente trovata si avrà (nel caso si consideri lo shift dei massimi di interferenza)

$$\Delta m \lambda = 2h\Delta a \Rightarrow h = \frac{\Delta m \lambda}{2\Delta a}$$

In realtà, questa formula è valida anche per lo shift di bande scure, perché

$$\Delta m = \left(m_2 + \frac{1}{2}\right) - \left(m_1 + \frac{1}{2}\right) = m_2 - m_1$$

Strumenti utilizzati

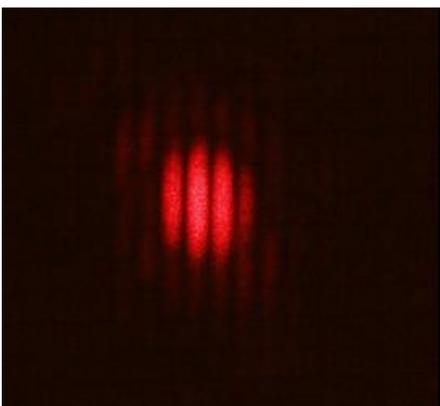
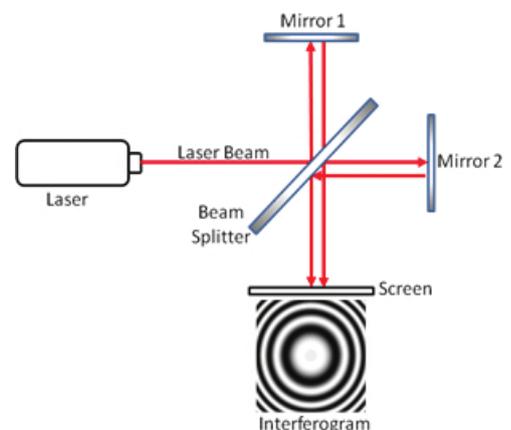
- Sorgenti di radiazione laser: laser rosso ($\lambda=633$ nm) e laser verde ($\lambda=532.1$ nm nominale)
- Lampada Pasco al sodio
- Diaframma, lente convergente, punta per allineamento laser
- Interferometro
- Schermo bianco
- Fotodiiodo
- Motore elettrico, cinghia di trasmissione, alimentatore

Procedimento

Laser rosso

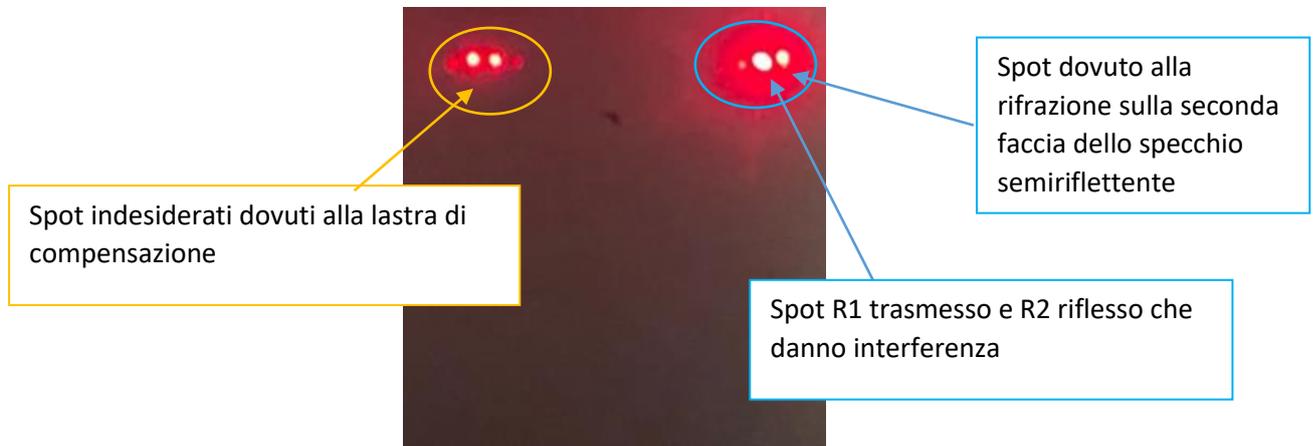
Si inizia la prima parte dell'esperienza, che consiste nella misurazione del rapporto di leva. Si accende il laser rosso e lo si posiziona sull'apposito supporto. Si allinea quindi il sistema, aiutandosi con specchi e con la punta di una matita inserita su un supporto. La condizione da ottenere è la seguente: il fascio emesso dalla sorgente dovrà incidere sullo specchio semiriflettente e si dovrà verificare che R1 venga riflesso dallo specchio mobile e in seguito da quello semiriflettente in modo da ritornare esattamente al centro della sorgente laser; in questo modo si è certi che i raggi considerati (riflessi e trasmessi) siano complanari. A questo punto, per visualizzare la figura di interferenza, si portano in sovrapposizione i raggi R2 riflesso e R1 trasmesso, operando sull'inclinazione dello specchio fisso.

In condizione ottimale, quando cioè gli specchi risultano perfettamente normali alla radiazione incidente e ortogonali tra di loro, si può osservare una figura di interferenza formata da bande circolari concentriche (L'immagine è tratta da <https://physicsopenlab.org/2020/05/16/interferometro-di-michelson-morley/>).



Nel caso in cui gli specchi non siano perfettamente calibrati la figura di interferenza risulterà composta da bande tra di loro parallele.

Sullo schermo, inoltre, non si troveranno solo gli spot dei raggi che interessano ai fini dell'esperienza, ma anche dei raggi dovuti a riflessioni indesiderate. Oscurando alternativamente lo specchio mobile e quello fisso, è possibile individuare l'origine di tali fasci.



Una volta che il sistema è pronto, è possibile procedere alla raccolta di dati per la misurazione del rapporto moltiplicativo tra vite micrometrica e spostamento dello specchio. Si annota la posizione iniziale della vite e agendo su di essa si osserva l'alternanza di bande di interferenza: fissando un punto dello schermo, si conta il numero di bande scure che si alternano in quella posizione (la scelta di contare bande scure o chiare è puramente arbitraria). Dopo aver contato un numero significativo di bande (20 - 40), si registra la posizione finale della vite. Utilizzando poi le relazioni descritte nella parte teorica, si ricava il valore di h .

Lambda rosso (m)	Posizione iniziale vite (m) $\pm 0.01 \cdot 10^{-3}$ m	Posizione finale vite (m) $\pm 0.01 \cdot 10^{-3}$ m	Δa (m) $\pm 2 \cdot 10^{-5}$ m	Δm	Rapporto di leva h	Errore su h	Media pesata
$6,33 \cdot 10^{-7}$	$3,00 \cdot 10^{-3}$	$3,06 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-5}$	35	$1,8 \cdot 10^{-1}$	$\pm 0,6 \cdot 10^{-1}$	$(1,9 \pm 0,3) \cdot 10^{-1}$
	$3,50 \cdot 10^{-3}$	$3,55 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-5}$	30	$1,9 \cdot 10^{-1}$	$\pm 0,7 \cdot 10^{-1}$	
	$3,55 \cdot 10^{-3}$	$3,61 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-5}$	40	$2,1 \cdot 10^{-1}$	$\pm 0,7 \cdot 10^{-1}$	
	$3,00 \cdot 10^{-3}$	$3,05 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-5}$	31	$1,9 \cdot 10^{-1}$	$\pm 0,7 \cdot 10^{-1}$	
	$1,00 \cdot 10^{-2}$	$1,01 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-5}$	30	$1,9 \cdot 10^{-1}$	$\pm 0,7 \cdot 10^{-1}$	

Stima degli errori:

Errore sulle posizioni iniziale e finale della vite: incertezza strumento $\pm 0.01 \cdot 10^{-3}$ m

Errore su Δa : $\Delta a = \text{posizione finale} - \text{posizione iniziale}$, allora $\delta \Delta a = \delta \text{posizione finale} + \delta \text{posizione iniziale}$

Errore sul rapporto di leva h : $\delta h = \left| \frac{\partial}{\partial \Delta a} h \right| \delta \Delta a = h \frac{\delta \Delta a}{\Delta a}$

Errore sulla media pesata: $\delta \bar{h} = \frac{1}{\sum \left(\frac{1}{\delta h_i} \right)^2} = 0.03$

Laser verde

Nella seconda parte dell'esperienza, si utilizza il valore di h individuato per misurare la lunghezza d'onda incognita di un laser verde. Si procede sostituendo al laser rosso il laser verde, verificando quindi il perfetto allineamento del sistema in modo da osservare una figura di interferenza sullo schermo. Per calcolare il valore di λ si utilizza una relazione derivata da quella utilizzata per la stima di h , infatti

$$\lambda = \frac{2 \Delta a h}{\Delta m}$$

Basterà quindi annotare la posizione iniziale della vite, contare numero consistente di frange di interferenza (costruttiva o distruttiva) che si alternano per un punto dello schermo (20 – 40) e annotare la posizione finale.

Posizione iniziale vite (m) $\pm 0.01 * 10^{-3} \text{ m}$	Posizione finale vite (m) $\pm 0.01 * 10^{-3} \text{ m}$	Δa (m) $\pm 2 * 10^{-5} \text{ m}$	Δm	lambda verde (m)	Media pesata (m)
$1,00 * 10^{-2}$	$1,004 * 10^{-2}$	$4,00 * 10^{-5}$	30	$5,18 * 10^{-7}$	$5,33 * 10^{-7}$
$5,00 * 10^{-3}$	$5,040 * 10^{-3}$	$4,00 * 10^{-5}$	30	$5,18 * 10^{-7}$	
$1,00 * 10^{-2}$	$1,005 * 10^{-2}$	$5,00 * 10^{-5}$	40	$4,86 * 10^{-7}$	
$1,00 * 10^{-2}$	$1,006 * 10^{-2}$	$6,00 * 10^{-5}$	40	$5,83 * 10^{-7}$	
$1,00 * 10^{-2}$	$1,01 * 10^{-2}$	$5,00 * 10^{-5}$	35	$5,55 * 10^{-7}$	
$1,00 * 10^{-2}$	$1,01 * 10^{-2}$	$5,00 * 10^{-5}$	35	$5,55 * 10^{-7}$	
$5,50 * 10^{-3}$	$5,54 * 10^{-3}$	$4,00 * 10^{-5}$	30	$5,18 * 10^{-7}$	

Stima degli errori:

Errore sulle posizioni iniziale e finale della vite: incertezza strumento $\pm 0.01 * 10^{-3} \text{ m}$

Errore su Δa : $\Delta a = \text{posizione finale} - \text{posizione iniziale}$, allora $\delta \Delta a = \delta \text{posizione finale} + \delta \text{posizione iniziale}$

Errore su λ : $\left| \frac{\partial}{\partial \Delta a} \lambda \right| \delta \Delta a + \left| \frac{\partial}{\partial h} \lambda \right| \delta h = \left| \frac{2h}{\Delta m} \right| \delta \Delta a + \left| \frac{2\Delta a}{\Delta m} \right| \delta h = 3 * 10^{-7} \text{ m}$

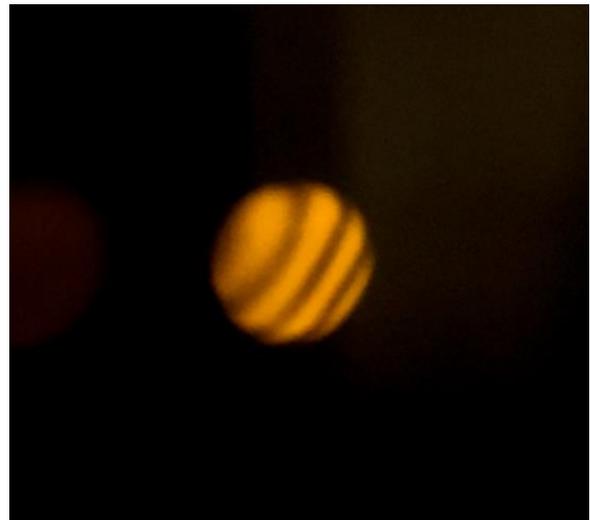
Errore sulla media: $\delta \bar{\lambda} = \frac{1}{\Sigma \left(\frac{1}{\delta \lambda_i} \right)^2} = 1 * 10^{-7}$

Si può notare che il valore ottenuto per la lunghezza d'onda di 533 nm è prossimo al valore nominale di 532,1 nm. Tuttavia, l'errore ad esso associato è circa il 20%, che risulta essere notevolmente grande. Per ridurlo sarebbe opportuno minimizzare l'errore relativo su Δa (quello assoluto non può essere variato) studiando un numero molto elevato di bande di interferenza. Si potrebbe inoltre ridurre eseguendo un numero elevato di prove indipendenti tra di loro.

Lampada al sodio

La terza parte dell'esperienza è concettualmente analoga alla seconda, in quanto consiste nella determinazione della lunghezza d'onda della sorgente di radiazione, che in questo caso è una lampada al sodio. È tuttavia necessario evidenziare una differenza teorica rispetto ai casi precedentemente studiati: la radiazione del laser è infatti monocromatica, cioè caratterizzata da una sola lunghezza d'onda, mentre la lampada al sodio emette uno spettro di lunghezze d'onda, è policromatica. La luce che si può vedere sullo schermo è di colore giallo in quanto la lunghezza d'onda con intensità maggiore, per il sodio, è proprio quella corrispondente al giallo. Si studierà il fenomeno di interferenza dovuto proprio a questa lunghezza d'onda (circa $\lambda=589 \text{ nm}$).

Si procede nel seguente modo: si posiziona la lampada a scarica sul supporto e, nello spazio tra sorgente e specchio semiriflettente, vengono inseriti un diaframma e una lente convergente. Il primo, posto a ridosso della lampada, serve a selezionare solo una parte della radiazione emessa e schermare l'interferometro da luce diffusa che renderebbe meno nitida la visualizzazione della figura di interferenza. L'utilizzo della lente convergente ha invece il fine di concentrare il più possibile i raggi selezionati sullo specchio semiriflettente: essa viene infatti traslata in modo da trovare la posizione in cui la figura di interferenza risulti "a fuoco".



A questo punto si annotano la posizione iniziale della vite, il numero di frange che si alternano per un punto dello schermo e la posizione finale della vite.

Posizione iniziale vite (m) $\pm 0.01 \cdot 10^{-3} \text{ m}$	Posizione finale vite (m) $\pm 0.01 \cdot 10^{-3} \text{ m}$	$\Delta a \text{ (m)}$ $\pm 0.02 \cdot 10^{-3} \text{ m}$	$\lambda \text{ sodio (m)}$	$\delta \lambda \text{ (m)}$	Δm	Media pesata
$1,00 \cdot 10^{-2}$	$1,00 \cdot 10^{-2}$	$4,00 \cdot 10^{-5}$	$5,18 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{-7}$	30	$5,84 \cdot 10^{-7} \text{ m}$
$1,00 \cdot 10^{-2}$	$1,01 \cdot 10^{-2}$	$5,00 \cdot 10^{-5}$	$5,55 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{-7}$	35	
$6,00 \cdot 10^{-3}$	$6,04 \cdot 10^{-3}$	$4,00 \cdot 10^{-5}$	$6,22 \cdot 10^{-7}$	$4 \cdot 10^{-7}$	25	
$6,00 \cdot 10^{-3}$	$6,06 \cdot 10^{-3}$	$6,00 \cdot 10^{-5}$	$5,83 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{-7}$	40	
$6,00 \cdot 10^{-3}$	$6,05 \cdot 10^{-3}$	$5,00 \cdot 10^{-5}$	$6,48 \cdot 10^{-7}$	$4 \cdot 10^{-7}$	30	
$7,00 \cdot 10^{-3}$	$7,05 \cdot 10^{-3}$	$5,00 \cdot 10^{-5}$	$6,48 \cdot 10^{-7}$	$4 \cdot 10^{-7}$	30	
$1,15 \cdot 10^{-2}$	$1,15 \cdot 10^{-2}$	$4,00 \cdot 10^{-5}$	$5,18 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{-7}$	30	

Stima degli errori:

Errore sulle posizioni iniziale e finale della vite: incertezza strumento $\pm 0.01 \cdot 10^{-3} \text{ m}$

Errore su Δa : $\Delta a = \text{posizione finale} - \text{posizione iniziale}$, allora $\delta \Delta a = \delta \text{posizione finale} + \delta \text{posizione iniziale}$

$$\text{Errore su } \lambda: \left| \frac{\partial}{\partial \Delta a} \lambda \right| \delta \Delta a + \left| \frac{\partial}{\partial h} \lambda \right| \delta h = \left| \frac{2h}{\Delta m} \right| \delta \Delta a + \left| \frac{2\Delta a}{\Delta m} \right| \delta h$$

$$\text{Errore sulla media: } \delta \bar{\lambda} = \frac{1}{\sum \left(\frac{1}{\delta \lambda_i} \right)^2} = 1.3 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

Battimenti del sodio

Durante l'esecuzione della terza parte, si è riscontrato come l'intensità della figura di interferenza presentasse massimi e minimi (fino a scomparire del tutto) al variare della posizione dello specchio mobile. Questo fenomeno prende il nome di "battimento" ed è dovuto alla sovrapposizione di due onde con frequenza diversa che dà luogo a variazioni periodiche dell'ampiezza massima dell'onda risultante. In effetti, nello spettro di emissione del sodio, sono presenti due lunghezze d'onda nell'intervallo del giallo, $\lambda=589 \text{ nm}$ e $\lambda=589.6 \text{ nm}$, che sono responsabili del fenomeno appena descritto.

È allora possibile determinare sperimentalmente la lunghezza d'onda delle due onde che danno battimenti e si opera nel seguente modo: mantenendo il sistema come nella terza parte, si sostituisce allo schermo un fotodiodo collegato all'interfaccia PASCO e si collega la vite micrometrica, tramite una cinghia di trasmissione, a un motore elettrico, che permette una rotazione della vite a velocità angolare costante nel tempo.

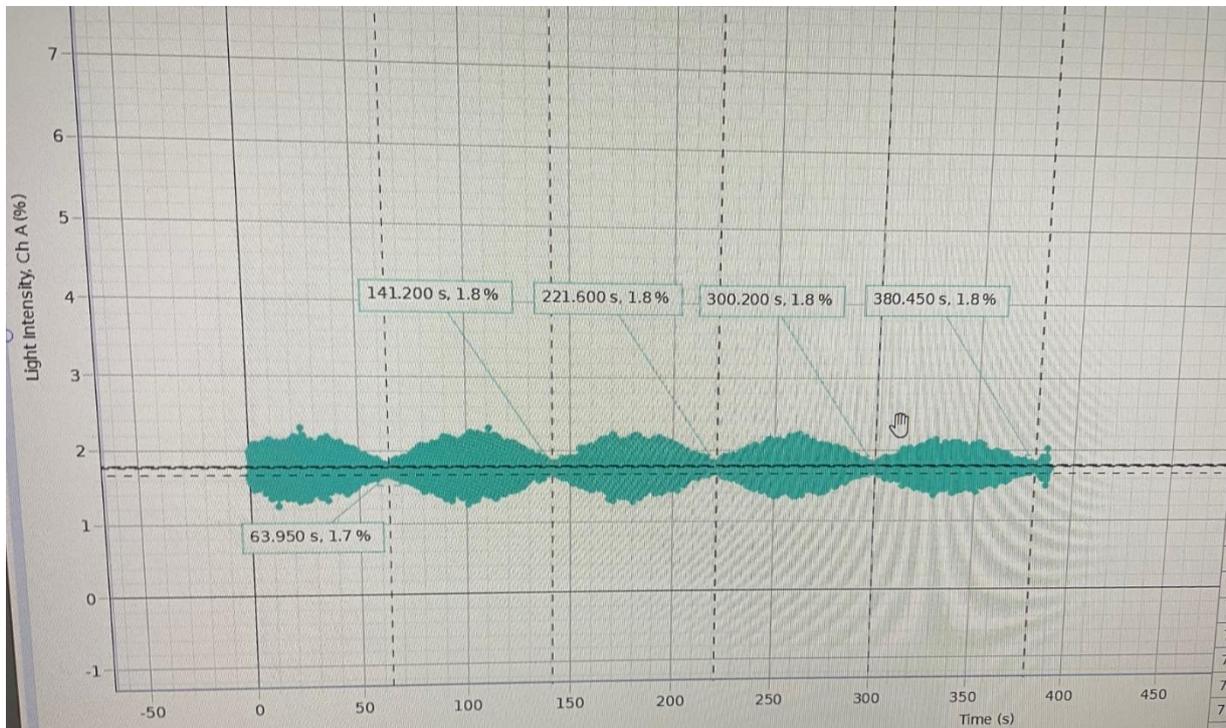


Grafico dell'intensità luminosa in funzione del tempo ottenuto tramite interfaccia PASCO

Per studiare il fenomeno dei battimenti si procederà con un metodo di verifica della consistenza delle ipotesi: supponendo che le lunghezze d'onda delle onde interagenti siano quelle del doppietto del sodio, si ricaverà il valore teorico della lunghezza d'onda dell'onda modulante del battimento e lo si confronterà con il valore sperimentale. Quest'ultimo sarà pari al doppio della distanza tra due minimi di intensità.

Si trova che lo spostamento della vite micrometrica tra due minimi è

$$\Delta a = (1.39 \pm 0.05) * 10^{-3} m$$

Si definisce la distanza tra due minimi di intensità Δs e il suo valore sperimentale è

$$\Delta s = \Delta a h = (0.26 \pm 0.05) * 10^{-3} m$$

$$\delta\Delta s = \Delta s \left(\frac{\Delta a}{\delta\Delta a} + \frac{h}{\delta h} \right)$$

Il valore del numero d'onda dell'onda modulante risulta

$$\frac{\Delta k_{exp}}{2} = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{2\Delta s} = \frac{\pi}{2\Delta s} = 6000 \frac{1}{m}$$

$$\delta \left(\frac{\Delta k_{exp}}{2} \right) = \left| -\frac{\pi}{2\Delta s^2} \right| \delta\Delta s = 1000 \frac{1}{m}$$

A livello teorico, considerate le due onde interagenti,

$$\lambda_1 = 589 \text{ nm} \quad k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} = 10667547.21 \left[\frac{1}{nm} \right]$$

$$\lambda_2 = 589.6 \text{ nm} \quad k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = 10656691.5 \left[\frac{1}{nm} \right]$$

Dalle leggi che descrivono il battimento, sappiamo che

$$\frac{\Delta k}{2} = \frac{k_1 - k_2}{2} = 5427.855 \frac{1}{m}$$

Il valore trovato per $\Delta k/2$ sperimentalmente, $6000 \pm 1000 \text{ 1/m}$, è consistente con il valore teorico individuato. Questo porta alla conclusione che le lunghezze d'onda interagenti siano quelle del doppietto del sodio. Grazie al metodo interferometrico, è stato dunque possibile risolvere il doppietto del sodio.