LABORATORIO DI FISICA 2

SECONDO ESPERIMENTO: LENTI E FORMAZIONE IMMAGINI

Marcello Cacciatore

Marta Devodier

1 Obiettivi dell'esperimento

- Determinare la distanza focale di lenti convergenti (linearizzazione, metodo di Bessel);
- determinare il rapporto di ingrandimento di lenti convergenti;
- costruzione cannocchiale di Keplero;
- costruzione di un ologramma con CD.

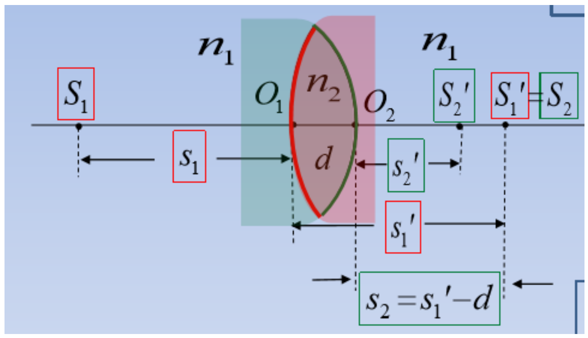
2 Materiale utilizzato

Lenti convergenti (lenti d'ingrandimento), CD, laser, supporti "casalinghi" per la realizzazione del setup sperimentale.
Si mostra di seguito la foto delle lenti utilizzate (quelle di cui abbiamo calcolato la lunghezza focale):

(a) *Lente 1*

(b) *Lente 2*

3 Cenni teorici



Una lente è la combinazione di due diottri; se è sottile (caso da noi studiato) si considera $d \to 0$. Combinando le equazioni dei diottri si ottiene per le lenti sottili la relazione:

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_{2'}} = \frac{1}{f}$$

dove f rappresenta la lunghezza focale, ovvero la distanza del fuoco dalla lente. Per fuoco intendiamo i due seguenti punti:
- F, punto in cui se supponiamo di fissare l'oggetto, il fascio emergente dalla lente risulta costituito da raggi paralleli;
- F', punto in cui un fascio parallelo (quello emesso da un oggetto posto all'infinito) viene fatto convergere dalla lente.

Si definisce inoltre un coefficiente m, detto fattore d'ingrandimento laterale, dato dal prodotto dei coefficienti m_1 e m_2 dei due diottri, e risulta $m = -\frac{s_2'}{s_1}$, e il suo significato è appunto quello di rapporto tra le dimensioni lineari dell'oggetto reale "visto" dalla lente e di quello proiettato oltre la lente (l'immagine coniugata della sorgente).

4 Distante focale

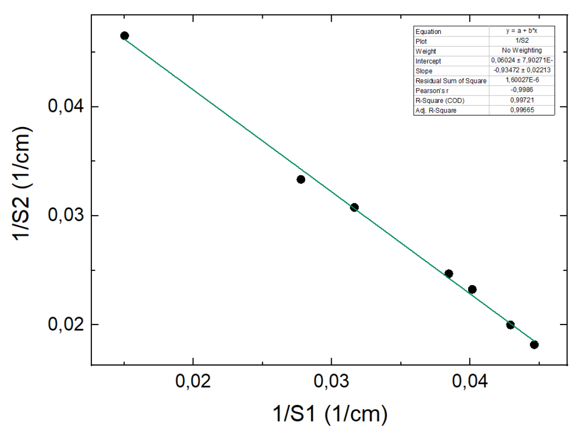
4.1 Metodo 1, linearizzazione (lente 1)

Si utilizza una lente di ingrandimento come lente convergente. Ci si assicura di assemblare più precisamente possibile il setup sperimentale:
1- si individua con l'aiuto del laser l'asse ottico;
2- ci si assicura di allineare lente e schermo in modo che siano entrambi perpendicolari al fascio laser.

Come schermo si considera una parete verticale e come sorgente si utilizzata un'immagine proiettata dallo smartphone con elevata luminosità. La lente viene fatta muovere sul piano facendo si che il suo asse focale sia sempre ortogonale

al muro e alla sorgente. Si procede allora prendendo diverse misure di distanze fra lente-sorgente (S_1) e lente-schermo (S_2) per poi linearizzare l'equazione delle lenti nella forma $y = a + bx$, con $y = \frac{1}{S_2}, x = \frac{1}{S_1}, a = \frac{1}{f}, b \approx -1$. Si grafica dunque $\frac{1}{S_2}$ in funzione di $\frac{1}{S_1}$, ottenendo una retta con coefficiente angolare di ≈ -1 e intercetta pari a $\frac{1}{f}$. Dall'inverso dell'intercetta si ricava infine la distanza focale.
Si mostra di seguito la tabella con i dati raccolti e il grafico ottenuto con Origin dalla linearizzazione.

$\frac{1}{S_1}(\frac{1}{cm})$	$\frac{1}{S_2}(\frac{1}{cm})$
31,6	32,5
23,3	50
26	40
22,4	55
24,9	43
66,5	21,5
36	30



Elaborando allora i dati ottenuti, si trova

$$a = (6,024 \pm 0,079) \cdot 10^{-2} \frac{1}{cm}$$

da cui si ricava

$$f = \frac{1}{a} = (16,6 \pm 0,2)cm$$

NOTA: si mostrano di seguito le formule utilizzate per il calcolo di a, b e dei relativi errori (metodo dei minimi quadrati):

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{\Delta} \\
b &= \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\Delta} \\
\sigma_a^2 &= \sigma_y^2 \frac{\sum x_i^2}{\Delta} \\
\sigma_b^2 &= \frac{N \sigma_y^2}{\Delta}
\end{aligned}
$$

con

$$
\begin{aligned}
\sigma_y^2 &= \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^{N} (y_i - a - bx_i)^2 \\
\Delta &= N \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2
\end{aligned}
$$

L'errore su f invece è stato calcolato per propagazione degli errori come:

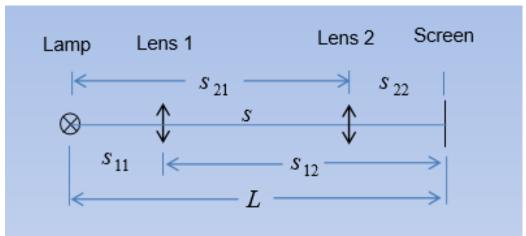
$$\delta f = \frac{\delta a}{|a|} |f|$$

Osservazioni

Per verificare che il valore della distanza focale così ottenuto sia attendibile, si procede facendo incidere i raggi di luce sulla lente e osservando l'immagine che si forma capovolta a fuoco su uno schermo posto al di là della lente. A questo punto la distanza lente-schermo risulta uguale alla distanza focale della lente: si può considerare infatti la sorgente di luce posta a distanza infinita, e dunque dalla relazione delle lenti si trova che $\frac{1}{S_2} = \frac{1}{f}$ (poiché $\frac{1}{S_1} \to 0$ per $S_1 \to \infty$), da cui segue che $S_2 = f$. Procedendo in questo modo si trova una distanza focale pari a $(17 \pm 0,5) cm$. I due risultati sono dunque consistenti.

4.2 Metodo di Bessel (lente 2)

Si utilizza una lente di ingrandimento come lente convergente. Dopo una stima approssimativa della distanza focale (vedi paragrafo "Osservazioni"), si dispongono la sorgente luminosa e lo schermo a distanza maggiore di 4 volte la focale. Questo permette di applicare il metodo di Bessel. Ecco uno schema del setup, dove $L > 4f$, e lens 1 e 2 sono le due posizioni della lente tali che l'immagine risulti a fuoco.



Come sorgente è stata utilizzata un'immagine con sufficienti particolari visibili, proiettata dallo smartphone con elevata luminosità. Come schermo si è deciso di utilizzare una parete verticale. Il telefono viene posto parallelo alla parete, e la lente in maniera tale che il suo asse focale sia ortogonale al muro. Quest'ultima viene fatta muovere su un tavolino (precedente incastonata in una "gabbia" di scotch, per renderla pressochè immobile) e si segnano le distanze s_{11}, s_{12} rispettivamente distanza immagine-lente e distanza schermo-lente, alla quale l'immagine sul muro risulti nitida, ben messa a fuoco (analogamente si misurano s_{22}, s_{21}).
Sono due le posizioni alle quali ciò accade, detti punti coniugati; si osserva che la più precisa stima è quella realizzabile quando l'immagine viene rimpicciolita, piuttosto che ingrandita, infatti l'intervallo di posizioni alla quale la foto risulta nitida è ben più stretto, quindi il dato più affidabile (ciò si evince chiaramente dal video in allegato, in cui la lente viene traslata avanti e indietro rispetto alla posizione di messa a fuoco e si può apprezzare come l'immagine rimpicciolita resti nitida per un intervallo effettivamente più stretto di posizioni). Risulta:

- $L = (322 \pm 0,5) cm$
- $s_{22} = (60 \pm 0,2) cm$

Applicando l'equazione del metodo di Bessel (dove $s = L - 2s_{22}$ e $\delta s = \delta L + 2\delta s_{22}$)

$$f = \frac{L^2 - s^2}{4L}$$

si ottiene

$$f = (77,7 \pm 0,5) cm = (7,77 \pm 0,05) \cdot 10^{-1} m$$

dove δf è dato da

$$\delta f = |\frac{\partial f}{\partial L}| \cdot \delta L + |\frac{\partial f}{\partial s}| \cdot \delta s$$

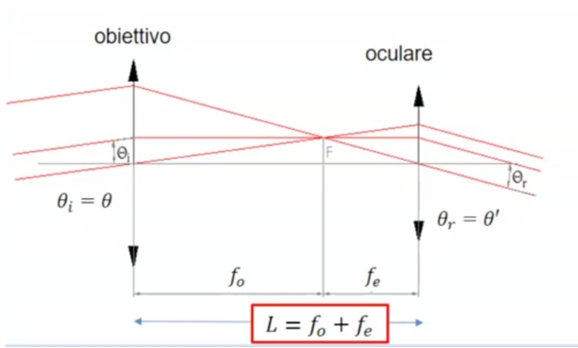
5 Fattore di ingrandimento laterale

Per quanto riguarda il fattore m delle lenti utilizzate, lo si è calcolato in due modi:
(1) come rapporto $m = -\frac{s_2'}{s_1}$; (2) come rapporto diretto sulle dimensioni lineari dell'immagine $m = \frac{h_2}{h_1}$. Utilizzando i dati della sezioni precedenti si ottiene: m (lente 1) (1) $= 0,56 \pm 0,008$ e (2)$= 0,58 \pm 0,03$ m (lente 2) (1) $= 0,229 \pm 0,001$ e (2)$= 0,21 \pm 0,02$ Dai dati ottenuti si evince che i valori sono consistenti tra loro, e che la misura effettuata nel modo (1) è più affidabile, dato il range di errore ottenuto.

6 Cannocchiale di Keplero

Utilizzando altre due lenti di ingrandimento, si è cercato di costruire il cannocchiale di Keplero, ovvero un sistema di due lenti entrambe convergenti, chiamate obiettivo e oculare. Sfruttando i metodi precedenti, si ricava la distanza focale delle due lenti:

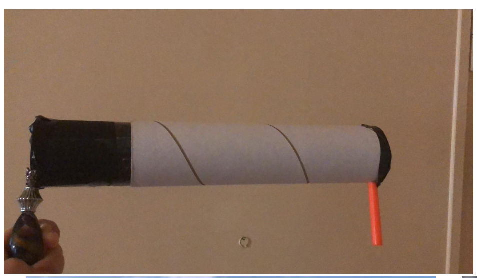
$$f(lente_{oculare}) = (10,3 \pm 0,2)cm$$
$$f(lente_{obiettivo}) = (20,1 \pm 0,2)cm$$



La teoria che sta alla base del cannocchiale di Keplero è la seguente:

si fa in modo che la distanza fra le due lenti sia pari alla somma delle lunghezze focali ($L = (30,4 \pm 0,4)cm$), in questo modo nello stesso punto si avrà sia il fuoco dell'oculare che il fuoco dell'obiettivo. Allora un oggetto che si trova a distanza infinita forma un immagine sul fuoco dell'obiettivo che diventa quindi oggetto per l'oculare. L'immagine (attraverso l'oculare) si forma poi all'infinito e può essere osservata dall'occhio in posizione rilassata. L'ingrandimento realizzato in questo caso dipende dal rapporto tra le due lunghezze focali: $M = \frac{f_{obiettivo}}{f_{oculare}}$. Diminuendo la focale dell'oculare si aumenta l'ingrandimento ottenuto e perciò quest'ultimo non dipenderà dal diametro dell'obiettivo, ma solo dalla sua lunghezza focale.

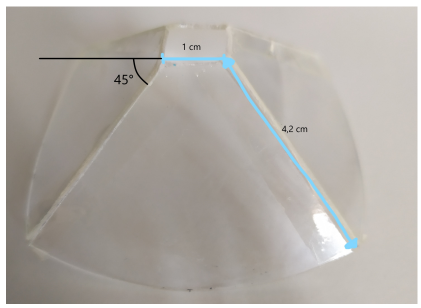
Si realizza il cannocchiale sfruttando due rotoli di cartone di diametri diversi (bisogna fare in modo che si possano inserire uno dentro l'altro e che possano scorrere) e si fissano le due lenti agli estremi. Si punta poi l'obiettivo verso oggetti a grandi distanze e si guarda con l'occhio attraverso l'oculare, facendo scorrere i due cartoni uno dentro l'altro in modo che la distanza fra le due lenti sia pari ad L.
L'ingrandimento ottenuto è pari a $M = \frac{20,1}{10,3} = (1,95 \pm 0,05)$.
Si mostrano di seguito la foto del cannocchiale realizzato e alcuni ingrandimenti ottenuti.



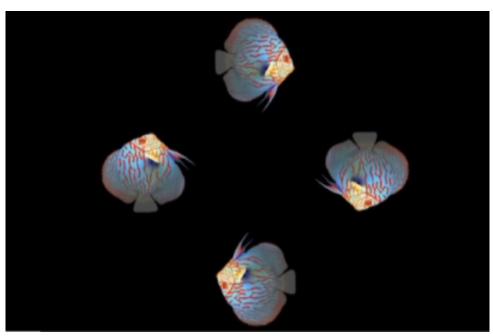
7 Piccolo approfondimento

OLOGRAMMA

In questa sezione riportiamo un esempio di formazione di immagini olografiche. Il metodo utilizzato per la riproduzione di un'immagine "a tutto tondo" (ologramma) è il cosiddetto metodo delle piramidi olografiche. Semplice ma sicuramente suggestivo. Si procede alla spellatura e pulizia di un cd, si tagliano 4 settori settori circolari (spuntati, come in figura) e si assemblano con lo scotch a dare una sorta di tronco di piramide (che chiameremo telaio).

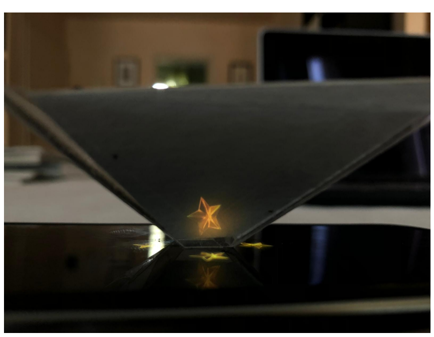


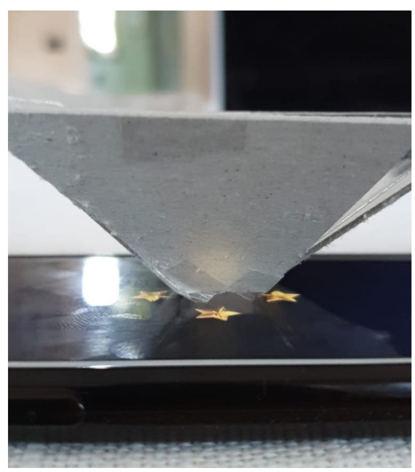
Ogni faccia della piramide risulta così inclinata di 45° rispetto all'orizzontale. L'obiettivo e di far apparire una figura tridimensionale all'interno della piramide, quindi vengono proiettate dal telefono quattro immagini poste in modo opportuno come in figura (sotto), ovvero ognuna ruotata di 90° rispetto alla precedente (con lo stesso verso di rotazione).



L'effetto ottico è visibile perché la luce viene riflessa dal telaio: l'immagine che si osserva all'interno della piramide è virtuale, diritta e di uguale dimensione (m=1).

Per accorgersi di ciò è sufficiente fare le seguenti prove:
1- se si coprono i 4 lati interni del telaio l'immagine a tutto tondo è ancora visibile;
2- se si coprono i lati esterni del telaio (basta anche solo coprire il lato da cui si osserva) l'immagine non è più visibile.
Questo ci porta direttamente ad escludere che l'immagine "3d" sia formata per trasmissione dei raggi luminosi e che l'unico fenomeno rilevante ai fini dell'illusione ottica sia la riflessione.
Si mostrano di seguito le immagini ottenute nei casi delle prove (1) e (2)





8 Considerazioni

Le principali fonti di errore si riscontrano nel montaggio del setup sperimentale, tuttavia i risultati ottenuti sono soddisfacenti. Si segnala in particolare il fatto che la misura di distanza focale realizzata col primo metodo, porta ad un risultato entro un errore dell' $1,2\%$, mentre la misura con il metodo di Bessel porta ad un valore con un errore dello $0,6\%$, risultando con ciò il più affidabile tra i due metodi.