

Legge di Biot-Savart

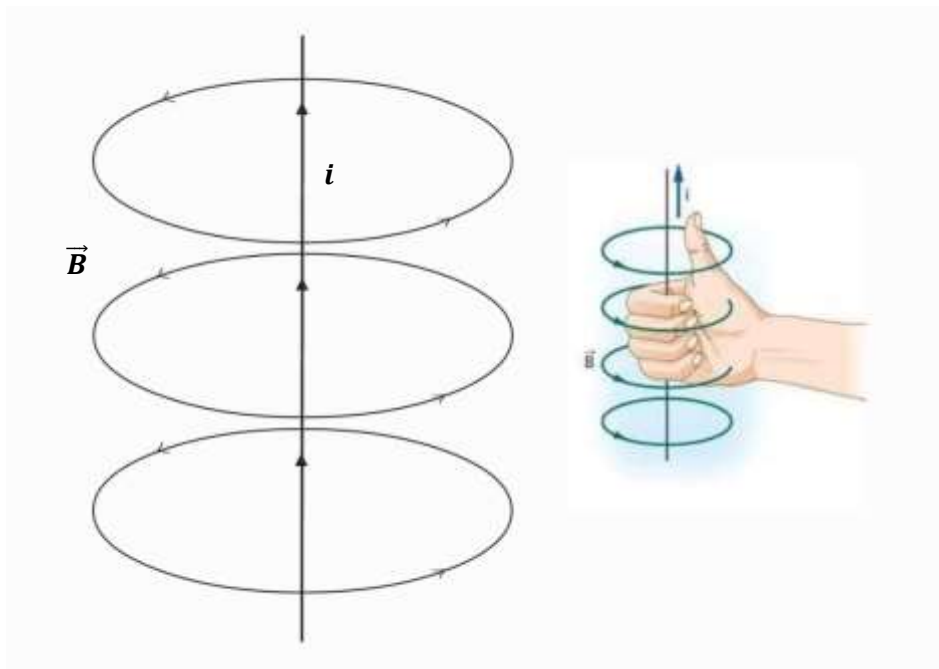
Apparato strumentale

- Breadboard;
- Cavetti di ferro;
- Resistenza;
- Generatore;
- Amperometro;
- Calamita;
- Nastro isolante;
- Squadra;
- Smartphone;
- Libri.

Trattazione teorica

Una certa corrente elettrica i che attraversa un filo conduttore rettilineo e indefinito nel vuoto genera un campo magnetico \vec{B} le cui linee di forza saranno delle circonferenze concentriche disposte su piani perpendicolari al filo aventi il centro nel filo stesso.

Il verso di queste linee viene determinato dalla regola della mano destra: disponendo il pollice nel verso della corrente, il verso della chiusura a pugno delle altre dita individuerà quello delle linee di campo.



Il modulo del campo magnetico invece viene espresso dalla legge di Biot-Savart:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

Dove:

- μ_0 è la permeabilità magnetica del vuoto, pari a:

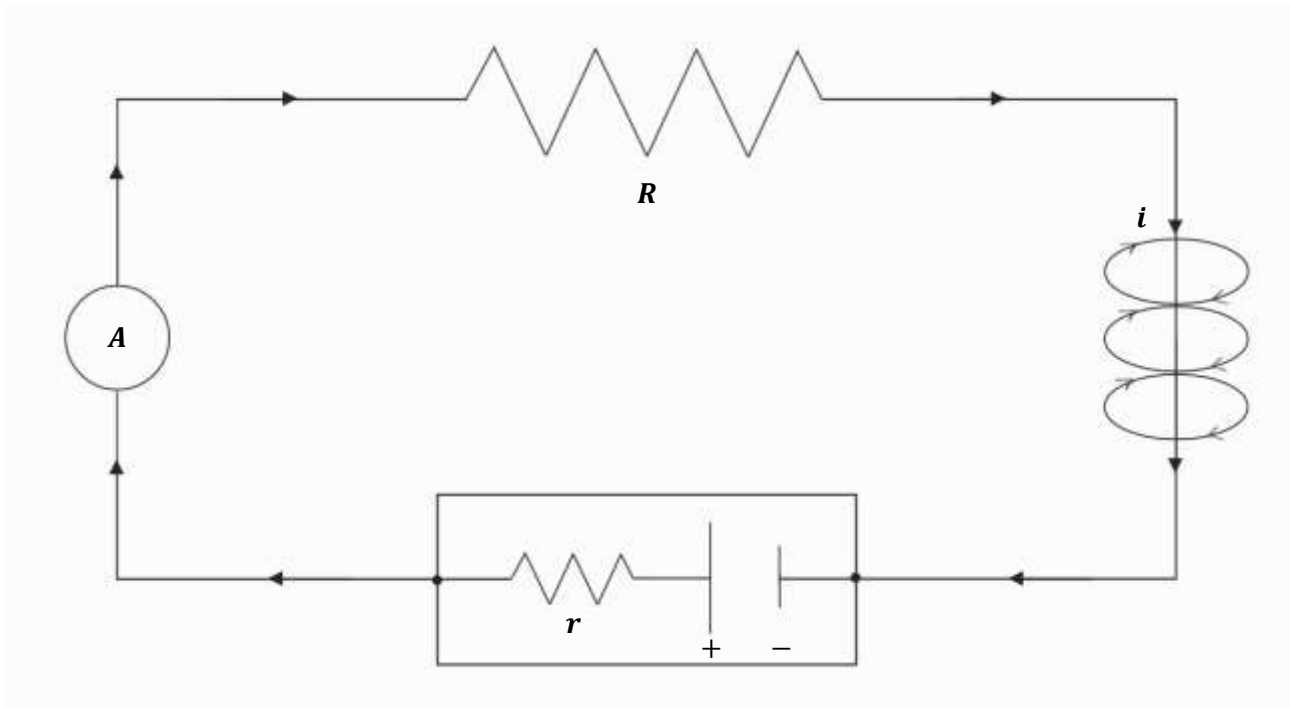
$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{H}{m}$$

- r è la distanza radiale dal filo rettilineo.

Esecuzione dell'esperimento

L'obiettivo dell'esperimento era quello di studiare il campo magnetico di un filo rettilineo percorso da corrente: pertanto, nella fase iniziale è stato costruito un circuito elettrico utilizzando la breadboard, il generatore, i cavi di ferro e una resistenza, collegando l'amperometro in serie rispetto a quest'ultima.

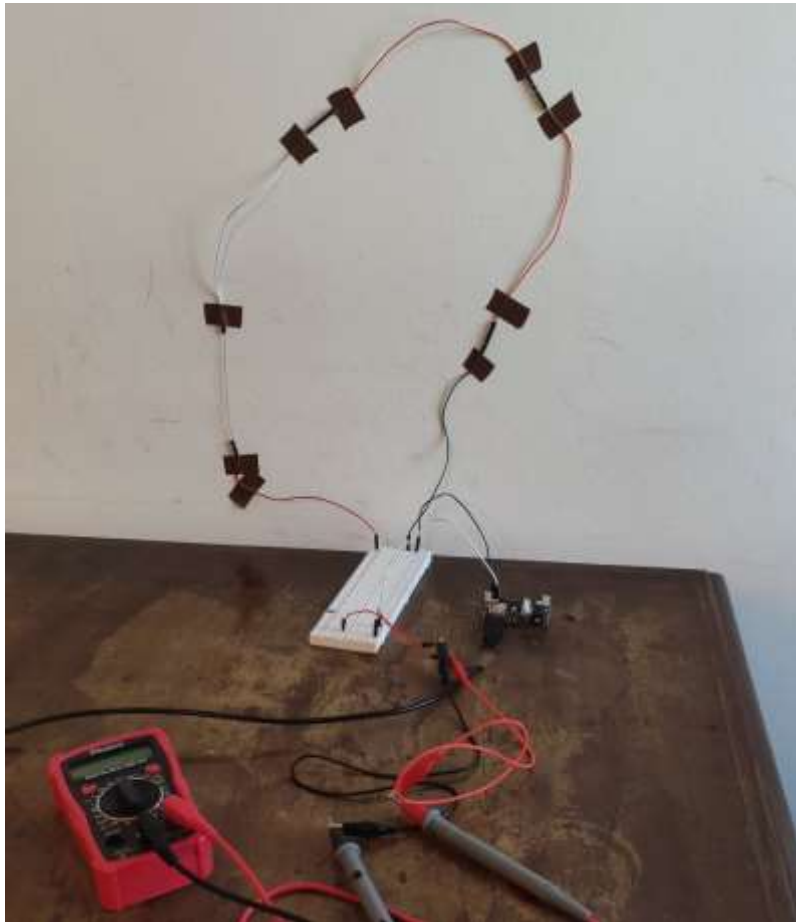
Qui di seguito viene riportata una schematizzazione del circuito:



Successivamente, dato che i cavetti conduttori (rame stagnato) sono schermati da una guaina, ne è stata completamente rimossa una da uno in particolare e, per questioni di praticità, con il nastro isolante e con la squadra questo è stato fissato verticalmente lungo il muro cercando di tenderlo il più possibile per renderlo rettilineo.

Inoltre, per evitare che gli altri cavi penzolassero nelle immediate vicinanze di quello scoperto essendo sia d'intralcio per l'acquisizione dei dati che possibili fonti di disturbo a causa di eventuali accoppiamenti, anche questi sono stati fissati con il nastro isolante lungo il muro cercando di allontanarli il più possibile dal cavo scoperto.

Nel complesso, la strumentazione è stata disposta in questo modo:

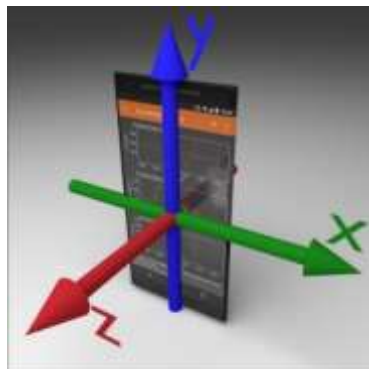


Nella seconda fase dell'esperimento, sullo smartphone è stata installata l'applicazione Phyphox per poterlo utilizzare come un magnetometro.

Per capire quale fosse il punto sensibile del dispositivo quest'ultimo è stato avvicinato a una piccola calamita con diverse angolazioni valutando contemporaneamente le misure dall'acquisizione dati: attraverso questo metodo è stato osservato che i valori più alti del campo magnetico sono stati registrati in concomitanza dell'avvicinamento della calamita alla parte superiore dello smartphone, a circa 1.7 cm dal lato destro. A questa misura è stata assegnata arbitrariamente un'incertezza di 3 mm stimata basandosi sulle fluttuazioni dei valori assunti dal campo traslando lateralmente lo smartphone.

$$d = (1.7 \pm 0.3) \text{ cm}$$

Dopo aver consultato le informazioni dell'applicazione Phyphox è stato appurato che i tre assi cartesiani in base ai quali vengono raccolte le misure sono disposti come illustrato qui di seguito:



Sono state formulate anche alcune considerazioni circa l'intensità della corrente elettrica: infatti, per la legge di Biot-Savart il modulo del campo magnetico generato dal filo si esprime come:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

Una volta isolato il termine $\frac{\mu_0}{2\pi}$, il valore di questa costante sarà:

$$\frac{\mu_0}{2\pi} = 2 \times 10^{-7} \frac{H}{m}$$

Considerato che il campo magnetico locale, frutto complessivo di una serie di campi tra i quali principalmente il campo geomagnetico e il contributo apportato da tutti i dispositivi elettrici presenti in casa, è dell'ordine di 10^{-6} , ipotizzando di avvicinare quanto più possibile il bordo dello smartphone al filo in modo tale che il punto sensibile disti da questo circa **2 cm** si avrebbe che:

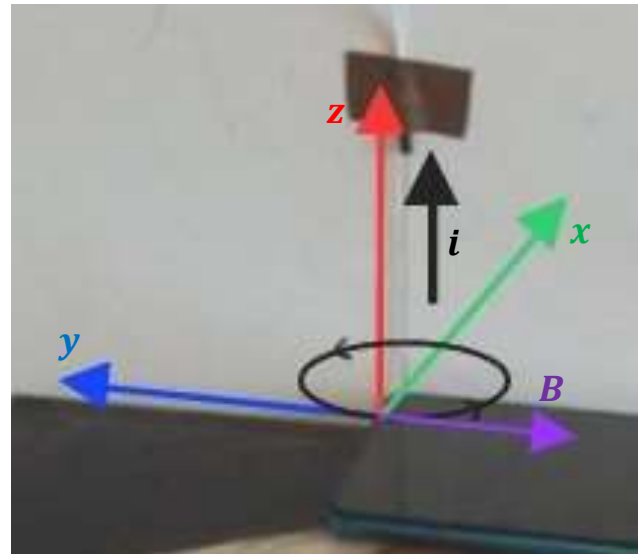
$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r} i = \left(2 \times 10^{-7} \frac{H}{m}\right) \left(\frac{1}{2 \times 10^{-2}}\right) i = \left(10^{-5} \frac{H}{m}\right) i$$

Non potendo naturalmente impiegare una corrente dell'ordine di **1 A** poiché sarebbe troppo intensa, affinché il campo generato dal filo sia apprezzabile dal magnetometro e non venga completamente oscurato da quello locale è stato valutato che la corrente dovesse essere almeno dell'ordine di **0.1 A**, in corrispondenza del quale i due campi sarebbero confrontabili.

Consolidate queste considerazioni, per creare un supporto adatto allo smartphone sono stati impilati dei libri fino a raggiungere approssimativamente il centro del filo scoperto per evitare di incappare in effetti di bordo indesiderati e porsi per quanto possibile in condizioni di filo idealmente rettilineo e indefinito.

Posizionando lo smartphone sul supporto è stato scelto di disporre il lato destro del dispositivo parallelamente al muro, e non il lato superiore, sia per evitare che il magnetometro rilevasse campi troppo intensi che per allineare il dispositivo rispetto al muro in modo più preciso rispetto a quanto si sarebbe fatto allineando il lato superiore più corto.

In accordo con quanto appreso dalle istruzioni dell'applicazione i suoi assi cartesiani risultavano disposti in questo modo:



E quindi, dato che la corrente elettrica sarebbe fluita dal basso verso l'alto, disponendo il lato superiore dello smartphone all'incirca frontalmente rispetto al filo ci si aspetta che approssimativamente la linea di campo passante per il punto sensibile vi incida perpendicolarmente, e di conseguenza che venga individuato un campo magnetico **opposto** all'asse y .

D'altra parte, ci si aspetta che non venga rilevata alcuna componente B_x o B_z , o quanto meno che, a causa dell'incertezza sulla posizione del punto sensibile o di eventuali errori di allineamento, siano molto piccole.

Prima di effettuare la misura è stato calibrato il valore della corrente elettrica in accordo con quanto analizzato prima: pertanto, erogando nel circuito un voltaggio pari a circa 5 V , siccome la corrente avrebbe dovuto essere dell'ordine di 0.1 A , attraverso la prima legge di Ohm è stato trovato un valore indicativo della resistenza da utilizzare:

$$R = \frac{V}{i} = 50\Omega$$

Dunque, considerando anche l'insieme dei singoli contributi resistivi apportati da ogni elemento circuitale stimato complessivamente pari a circa 10Ω , sulla breadboard è stata applicata una singola resistenza di 10Ω per un totale di circa 20Ω .

Infatti, una volta chiuso il circuito il valore di i letto sull'amperometro risultava essere:

$$i = (0.25 \pm 0.01)\text{A}$$

Dove 0.01 A altro non è se non la sensibilità dello strumento.

Aperto nuovamente il circuito, lo smartphone è stato avvicinato il più possibile misurando con la squadra (la quale sensibilità era di 1 mm) la distanza x tra il filo e il suo lato destro; considerando anche la distanza tra quest'ultimo e il punto sensibile, la misura dell'intera distanza radiale r è risultata essere di:

x	d	$r = x + d$
$(2 \pm 1)\text{mm}$	$(1.7 \pm 0.3)\text{cm}$	$(1.9 \pm 0.4)\text{cm}$

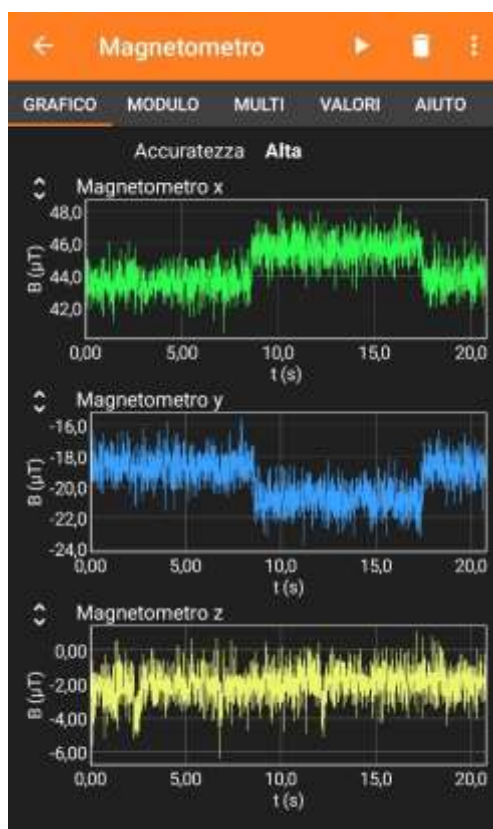
L'incertezza sulla posizione del punto sensibile lungo lo spessore dello smartphone è stata trascurata in quanto, in accordo con la teoria, per misurare questo tipo di campo magnetico sarebbe stata ininfluente.

Da queste due misure è stata quindi estrapolata una prima stima teorica di B :

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} = (2.6 \pm 0.7) \mu T$$

Per concludere, il magnetometro dello smartphone è stato azionato in un primo momento a circuito aperto per misurare l'intensità delle tre componenti del campo locale, e solo dopo alcuni secondi è stato chiuso il circuito.

Qui di seguito viene riportato uno screenshot dei grafici stilati dal magnetometro per ogni componente:



Come previsto, in corrispondenza della chiusura e dell'apertura del circuito il grafico della componente lungo y del campo registra un "salto" negativo di circa $2 \mu T$ essendo il \vec{B} del filo orientato discordemente all'asse, mentre il grafico della componente lungo z non riporta alcuna variazione significativa.

Inaspettato risulta invece il "salto" positivo piuttosto marcato, anch'esso di circa $2 \mu T$, riportato dalla componente lungo x , troppo alto per trovare origine da un semplice errore di allineamento dello smartphone rispetto al muro.

Infatti, in seguito ad un'osservazione più accurata effettuata utilizzando la stessa calamita di prima, è stato riscontrato che il punto sensibile dello smartphone si trova ad una distanza d' di circa 5 mm dal bordo superiore dello stesso. Pertanto, assegnando a quest'ultimo valore

un'incertezza pari ancora una volta a **3mm** stimata basandosi sulle fluttuazioni delle misure in seguito a una traslazione lungo y dello smartphone, l'effettiva distanza radiale r' del punto sensibile è stata calcolata come ipotenusa del triangolo rettangolo avente per cateti i lati r e d' :

N.B.: il riquadro giallo indica la zona di incertezza dove è più probabile che si trovi il punto sensibile dello smartphone, fissato nel suo centro e indicato con il punto rosso



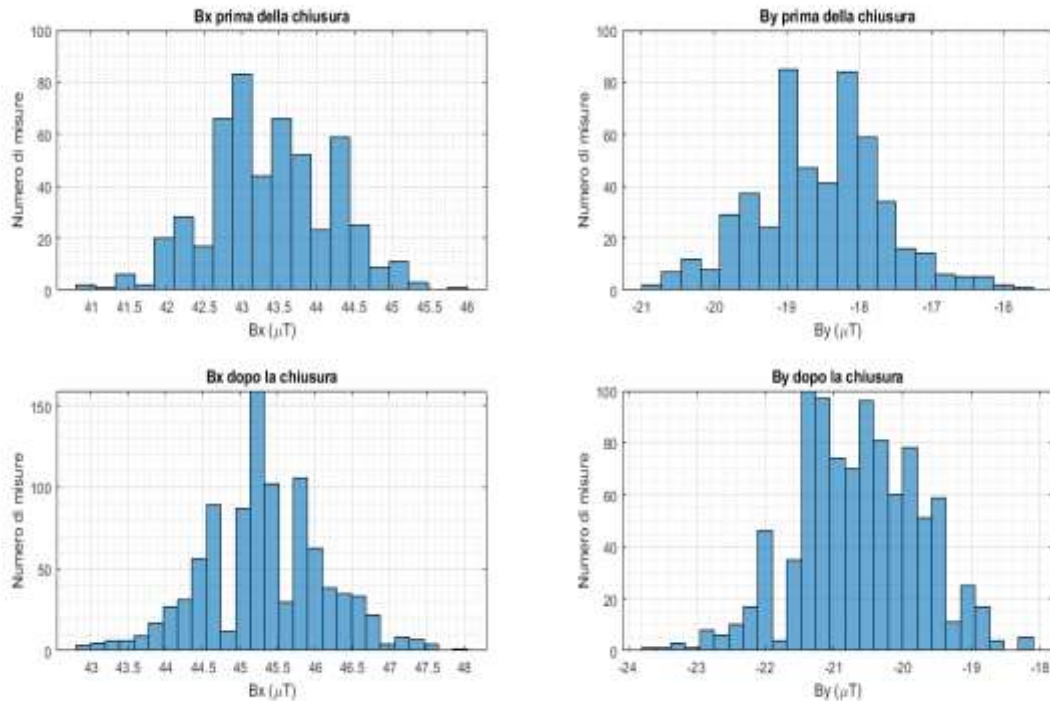
$$\begin{cases} r = (1.9 \pm 0.4) \text{ cm} \\ d' = (5 \pm 3) \text{ mm} \end{cases} \rightarrow r' = \sqrt{r^2 + (d')^2} = (1.96 \pm 0.46) \text{ cm}$$

In seguito è stata riformulata una seconda stima più precisa del modulo del campo magnetico in esame:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r'} = (2.5 \pm 0.7) \mu\text{T}$$

Dato che tutte le misure oscillano attorno a un certo valore medio probabilmente per via del rumore termico e oscillazioni casuali del campo locale, una volta esportati i dati sottoforma di file Excel sono stati costruiti degli istogrammi con i valori assunti dalle due componenti sia prima, per un totale di **518** misure suddivise in **20** classi, che dopo la chiusura del circuito, per un totale di **960** misure suddivise in **27** classi.

Le misure registrate in seguito all'apertura sono state trascurate.



Dato l'andamento degli istogrammi simile ad una campana gaussiana, la natura aleatoria delle oscillazioni è stata confermata: pertanto, sono stati calcolati i valori medi delle due componenti totali sia prima che dopo la chiusura del circuito, denominate rispettivamente $B_{x,y tot}$ e $B'_{x,y tot}$, considerando le corrispettive deviazioni standard come incertezze. Effettuando una differenza tra i valori così ottenuti sono state ottenute delle buone stime delle due componenti B_x e B_y del solo campo magnetico generato dal filo:

$B_{x tot}$ $(43.36 \pm 0.04)\mu T$	$B'_{x tot}$ $(45.32 \pm 0.03)\mu T$	$B_x = B'_{x tot} - B_{x tot}$ $(1.96 \pm 0.06)\mu T$
$B_{y tot}$ $(-18.55 \pm 0.04)\mu T$	$B'_{y tot}$ $(-20.63 \pm 0.03)\mu T$	$B_y = B'_{y tot} - B_{y tot}$ $(-2.09 \pm 0.07)\mu T$

Infine, è stato calcolato il modulo dell'intero B :

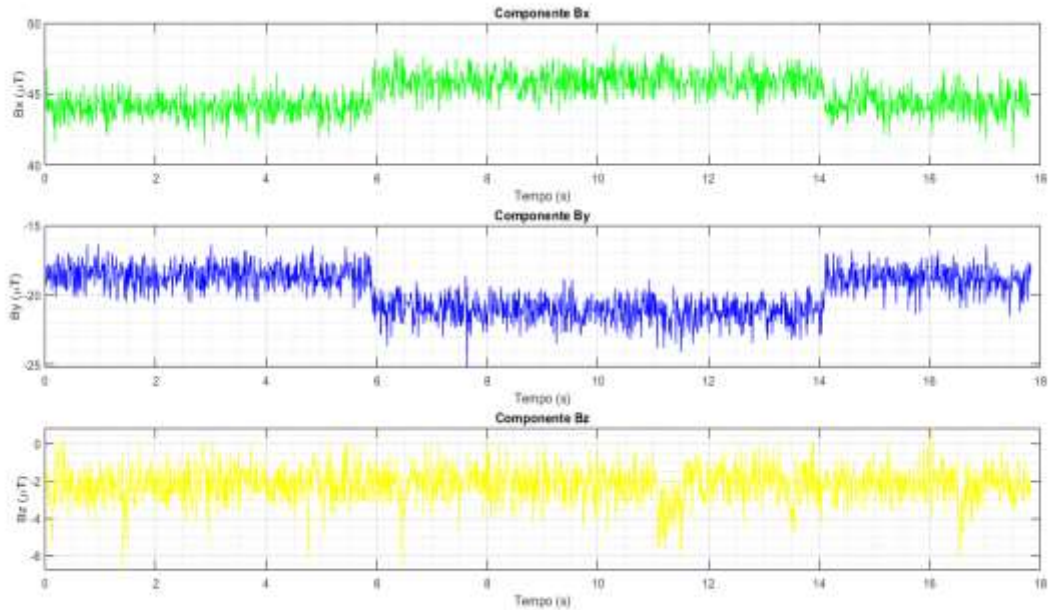
$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = (2.86 \pm 0.09)\mu T$$

Il valore ottenuto risulta sorprendentemente vicino alla stima teorica calcolata precedentemente, anche se leggermente più grande molto probabilmente a causa dell'incertezza sulla posizione del punto sensibile dello smartphone.

Infatti, comunque rientra nel range di errore, seppur piuttosto grossolano, della stima teorica.

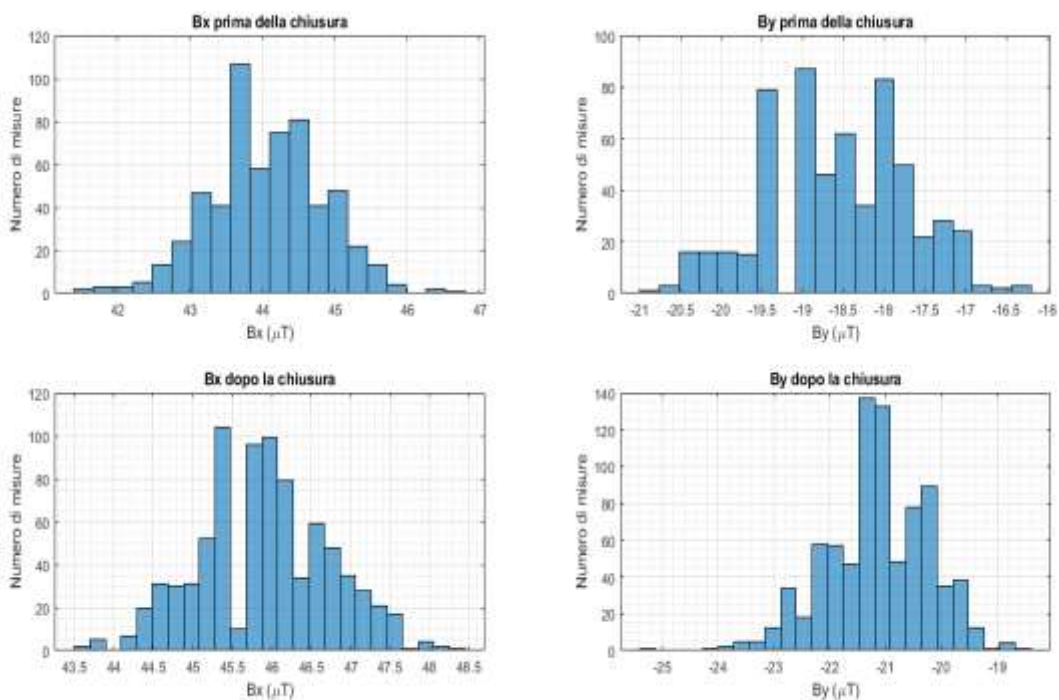
Inoltre, per verificare che la quota alla quale si trovava lo smartphone non influisse, o quanto meno pesasse relativamente poco sulle misure del campo magnetico generato dal filo, è stato aggiunto un altro libro alla pila composta prima e l'intero procedimento è stato reiterato una seconda volta.

Qui di seguito vengono riportati i grafici delle tre componenti stilati dal magnetometro:



Ancora una volta sono solo le componenti B_x e B_y a registrare un “salto” in seguito alla chiusura e all’apertura del circuito, mentre la componente B_z rimane sostanzialmente inalterata.

Le misure delle prime due componenti sia prima che dopo la chiusura del circuito, rispettivamente pari a 590 e 816, sono state graficate attraverso altri istogrammi composti rispettivamente da 20 e 25 classi.



Dato l’andamento approssimabile ad una campana gaussiana, la natura aleatoria delle oscillazioni è stata nuovamente confermata.

Conseguentemente, sono stati calcolati i valori medi delle due componenti totali sia prima che

dopo la chiusura del circuito, denominate ancora $B_{x,y tot}$ e $B'_{x,y tot}$, considerando le corrispettive deviazioni standard come incertezze. Effettuando una differenza tra i valori così ottenuti sono state ottenute delle buone stime delle due componenti B_x e B_y del solo campo magnetico generato dal filo:

$B_{x tot}$	$B'_{x tot}$	$B_x = B'_{x tot} - B_{x tot}$
$(44.06 \pm 0.03)\mu T$	$(45.91 \pm 0.03)\mu T$	$(1.84 \pm 0.06)\mu T$

$B_{y tot}$	$B'_{y tot}$	$B_y = B'_{y tot} - B_{y tot}$
$(-18.58 \pm 0.04)\mu T$	$(-21.13 \pm 0.03)\mu T$	$(-2.56 \pm 0.07)\mu T$

Infine, è stato calcolato il modulo dell'intero B :

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = (3.15 \pm 0.09)\mu T$$

Nonostante questo secondo valore sia un po' più alto del precedente, non si discosta troppo da quest'ultimo rientrando ancora una volta nel range di incertezza della stima teorica. Pertanto, seppur con un po' di errori grossolani, la legge di Biot-Savart è stata verificata.

Appendice

- Per calcolare l'errore di r come somma di x e d sono stati semplicemente sommati gli errori assoluti:

$$r = x + d \rightarrow \delta r = \delta x + \delta d$$

- Per calcolare l'errore di B come $\frac{\mu_0 i}{2\pi r}$ sono stati sommati gli errori relativi di i ed r :

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \rightarrow \delta B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \left(\frac{\delta i}{i} + \frac{\delta r}{r} \right)$$

- Per stimare l'errore di B ogni volta che è stato calcolato a partire da una coppia di componenti B_x e B_y sono state utilizzate le derivate parziali:

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} \rightarrow \delta B = \left| \frac{\partial B}{\partial B_x} \right| \delta B_x + \left| \frac{\partial B}{\partial B_y} \right| \delta B_y$$

$$\delta B = \frac{1}{2\sqrt{B_x^2 + B_y^2}} 2B_x \delta B_x + \frac{1}{2\sqrt{B_x^2 + B_y^2}} 2B_y \delta B_y = \frac{1}{B} (B_x \delta B_x + B_y \delta B_y)$$

Allo stesso modo, quando r' è stato calcolato come ipotenusa del triangolo rettangolo avente per cateti r e d' , essendo l'espressione del tutto analoga al caso precedente la formula di prima è stata riadattata:

$$\delta r' = \frac{1}{r'} (r \delta r + d' \delta d')$$

- Per calcolare l'errore su ogni media aritmetica \bar{x} calcolata su N misure è stata considerata la loro deviazione standard:

$$\delta \bar{x} = \sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$