

Interferenza da Doppia Fenditura e Diffrazione a una Fenditura:

SCOPO DELL'ESPERIENZA:

Lo scopo dell'esperimento consiste nel calcolo sperimentale della lunghezza d'onda di un fascio di luce monocromatica polarizzata (laser) sfruttando i fenomeni dell'interferenza di Young e della diffrazione di Fraunhofer. Inoltre, si andrà a verificare la consistenza dei dati ottenuti con i modelli teorici dell'interferenza e della diffrazione nell'approssimazione di angoli piccoli attraverso lo studio della funzione intensità luminosa dei due fenomeni.

INTRODUZIONE TEORICA:

L'interferenza è un fenomeno fisico che consiste nella sovrapposizione di due segnali ondulatori, che dà come risultato un'altra onda, di ampiezza e struttura in generale diversa da quella dei segnali iniziali. Non serve accada questo fenomeno, vale soltanto per una coppia di onde che soddisfa le *condizioni di interferenza*:

- I due fasci luminosi sono composti da onde della *stessa frequenza* ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$);
- Le due onde sono *coerenti*, ossia le due sorgenti ondose possiedono una differenza di fase costante nel tempo ($\Delta\varphi(t) = \text{costante}$);
- I campi elettrici \mathbf{E}_1 e \mathbf{E}_2 (e anche i rispettivi campi magnetici) delle onde vibrano nella *stessa direzione spaziale* (sono sulla stessa direzione r)

Per il nostro esperimento, studieremo il caso di due onde piane monocromatiche polarizzate lungo la stessa direzione, aventi dunque i campi elettrici descritti da una funzione sinusoidale, del tipo:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{01} \cos(k_1 r - \omega t + \varphi_1)$$

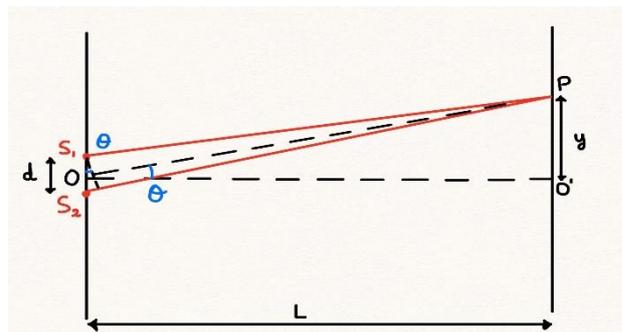
$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{02} \cos(k_2 r - \omega t + \varphi_2)$$

Ora, dalla *linearità dell'equazione delle onde* vale il principio di sovrapposizione, e dunque il campo elettrico risultante dell'onda originatasi dall'interferenza è pari alla somma vettoriale $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$. Se cerchiamo l'intensità luminosa dell'onda finale sappiamo che $I \propto E^2$, dunque calcolando la media di E^2/Z su un periodo temporale T multiplo delle singole onde (che è lo stesso, avente le onde la stessa frequenza), passando attraverso il teorema della media integrale e le formule di prostaferesi, si ricava la seguente relazione per l'intensità dell'onda:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta)$$

Dove Δ è la differenza di fase tra le due onde. Questa relazione è del tutto generale, e vale per ogni onda periodica che subisce fenomeno di interferenza, infatti grazie al *teorema di Fourier* ogni impulso luminoso periodico può essere convertito in una combinazione lineare di funzioni sinusoidali, funzioni per cui vale il principio di sovrapposizione, e per cui vale quella relazione sull'intensità luminosa.

Analizziamo ora il fenomeno dell'interferenza nella doppia fenditura di Young. Una sorgente puntiforme di luce interagisce con una parete opaca su cui stanno due sottili fenditure rettangolari, tali da far sì che il loro spessore sia *trascurabile* rispetto alla lunghezza d'onda della luce incidente. In questo modo nelle due fenditure compariranno due distinte sorgenti di luce S_1 e S_2 , e per il *principio di Huygens* saranno due sorgenti puntiformi di onde sferiche aventi stessa frequenza, stessa intensità luminosa e stessa fase



Due raggi monocromatici nella doppia fenditura di Young

iniziale (poiché provengono dalla stessa sorgente S), quindi soddisfano le ipotesi delle condizioni d'interferenza. Se poniamo successivamente alla parete con le fenditure uno schermo fotografico parallelo alla parete e posto a una distanza L molto maggiore della distanza d tra le due fenditure puntiformi, si osserverà sullo schermo il comparire di frange luminose e frange oscure con periodica regolarità. In particolare, andando ad osservare i vettori campo elettrico delle due onde che interferiscono nel punto P dello schermo, si nota che:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_0 \cos(kr_1 - \omega t)$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_0 \cos(kr_2 - \omega t)$$

Ed ora calcoliamo la differenza di fase tra le due onde, che è proporzionale alla differenza di cammino ottico, e si ha infatti che:

$$\Delta = kr_2 - kr_1 = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda}L \sin(\vartheta)$$

E quindi, l'intensità dell'onda in P dovuta all'interferenza, sapendo che $I_1 = I_2 = I_0$, è una funzione dipendente dall'angolo d'inclinazione dell'onda ϑ :

$$I(\vartheta) = 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}L \sin(\vartheta)\right) \right)$$

Studiando i massimi e i minimi di questa funzione rispetto a ϑ , passiamo allo studio degli zeri della derivata prima:

$$\frac{dI(\vartheta)}{d\vartheta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 2n\pi \quad \vee \quad \Delta = \pi + 2n\pi \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}$$

Per i due valori dello sfasamento Δ si hanno le posizioni di massimo e minimo della funzione:

- Per $\Delta = 2n\pi$ si hanno i *massimi dell'intensità luminosa*, e di conseguenza, dalla definizione di sfasamento si ricava che:

$$\sin(\vartheta) = n \frac{\lambda}{L} \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}$$

- Per $\Delta = \pi + 2n\pi$ si hanno i *minimi dell'intensità luminosa*, e di conseguenza, dalla definizione di sfasamento si ricava che:

$$\sin(\vartheta) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{L} \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}$$

Un'altra considerazione geometrica importante che si può fare nel caso di piccoli angoli, ossia per $\sin(\vartheta) \approx \tan(\vartheta) \approx \vartheta$, è riguardo il triangolo rettangolo formato dall'asse perpendicolare alle due fenditure e alla distanza di P dall'asse quando arriva sullo schermo fotografico (il parametro y), e attraverso la trigonometria si arriva a mostrare che la distanza n -esima di un massimo (o di un minimo) dal massimo centrale, posto come riferimento in $y = 0$, è pari a:

$$y_n = \frac{n\lambda}{d}L \quad \text{con } n \in \mathbb{Z} \quad \text{per i massimi}$$

$$y_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{d}L \quad \text{con } n \in \mathbb{Z} \quad \text{per i minimi}$$

Questo studio di $I(\vartheta)$ potrebbe farci pensare di avere una funzione intensità luminosa ove tutti i massimi hanno la stessa intensità luminosa e sono distribuiti periodicamente ed uniformemente lungo l'asse delle ascisse. Si vedrà nella pratica che ciò non è vero, e questo è dovuto al fatto che abbiamo approssimato

l'ampiezza delle fenditure di modo che in S_1 e S_2 siano sorgenti puntiformi. Ciò non è vero nella realtà, e vedremo che nella realtà la distribuzione dell'intensità luminosa lungo lo schermo sarà diversa da quella riportata nell'immagine, e ciò è dovuto alla compresenza di un altro importante fenomeno ottico, ossia la diffrazione (di Fraunhofer).

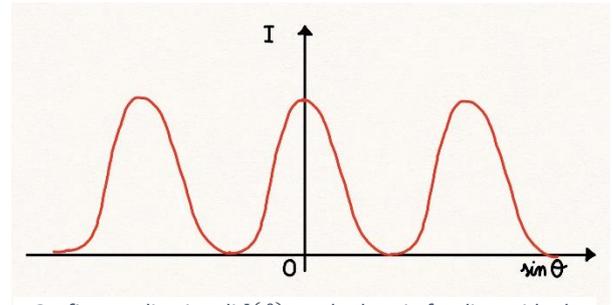
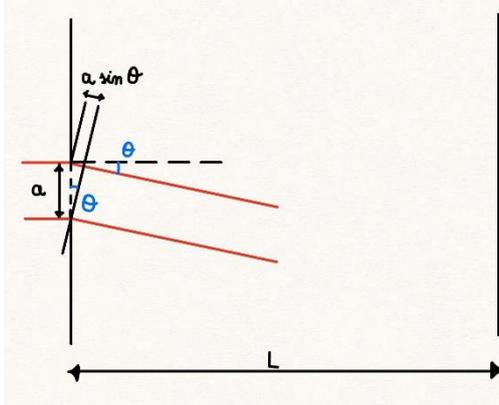


Grafico qualitativo di $I(\vartheta)$ per la doppia fenditura ideale

Consideriamo un'onda luminosa piana incidente perpendicolarmente lungo un diaframma rettangolare, in cui viene applicato un foro rettangolare di spessore non trascurabile, e poniamo uno schermo fotografico parallelo al diaframma, ponendolo a grande distanza da quest'ultimo. Si osservano sullo schermo delle frange di luce e di penombra, e questo fenomeno fisico, dovuto sostanzialmente all'interferenza del fascio luminoso con sé stesso, è detto *diffrazione*. Vi sono due principali categorie di diffrazione:

- *Diffrazione di Fresnel*, si verifica nel caso di sorgenti e schermo posti relativamente vicini all'apertura. Le onde luminose non sono piane e i raggi incidenti non sono paralleli.
- *Diffrazione di Fraunhofer*, si verifica nel caso di sorgenti e schermo posti lontani dall'apertura. Le onde luminose sono piane e i raggi incidenti sono paralleli.



Schema di una singola fenditura di spessore a posta ad una distanza L da uno schermo fotografico

Matematicamente, il tipo di diffrazione più semplice da trattare è quella di Fraunhofer, ed è anche facile da realizzare utilizzando un fascio di luce piana polarizzata monocromatica in entrata (un laser), e non è dunque necessario porre la sorgente molto distante dal diaframma, anche se lo schermo deve comunque essere mantenuto ad una distanza L grande rispetto all'apertura del diaframma. Trattiamo in particolare il caso della diffrazione di Fraunhofer nel caso di una singola fenditura rettangolare di spessore a , paragonabile alla lunghezza d'onda λ del fascio di luce monocromatica.

Andiamo, come fatto precedentemente per l'interferenza, a calcolare la funzione di intensità luminosa dell'onda uscente sullo schermo. Partiamo dall'applicazione del *principio di Huygens* sulla fenditura, che è parallela al fronte d'onda del fascio luminoso, e dunque ogni punto della fenditura è una sorgente di onde sferiche secondarie, che interagiscono ed interferiscono. Il campo elettrico risultante dalla somma di tutti i campi elettrici delle onde presenti sulla fenditura per il principio di sovrapposizione è pari a:

$$E = c \int_0^a \cos(kr - \omega t) dx$$

Dove c è un'opportuna costante di normalizzazione, dx è una porzione di spessore infinitesimo della fenditura, ed r è la direzione in cui sono diretti i campi elettrici delle onde secondarie. Attraverso la sostituzione $r = x \sin(\vartheta)$ e denominando $y = kx \sin(\vartheta)$, risolvendo e manipolando l'integrale per sostituzione e attraverso la trigonometria elementare, si arriva ad un'espressione del tipo:

$$E = \frac{ca}{\delta} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))$$

Dove $\delta = ka \sin(\vartheta)$, e dove A e B sono due costanti del tipo:

$$A = \int_0^\delta \cos y dy \qquad B = \int_0^\delta \sin y dy$$

Ora, siccome andiamo alla ricerca dell'intensità $I \propto E^2$, calcolando la media di E^2 , di nuovo utilizzando la trigonometria e il teorema della media integrale, si ottiene la funzione $I(\vartheta)$ così descritta:

$$I(\vartheta) = I_0 \frac{\sin^2(\alpha)}{\alpha^2} \quad \text{con } \alpha = \frac{\delta}{2} = \frac{\pi a}{\lambda} \sin(\vartheta)$$

Dove I_0 è l'intensità iniziale dell'onda luminosa entrante. Andiamo come prima a ricercare massimi e minimi della funzione $I(\vartheta)$ passando allo studio degli zeri della derivata prima:

$$\frac{dI(\vartheta)}{d\vartheta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(\alpha)(\alpha \cos(\alpha) - \sin(\alpha)) = 0$$

Di conseguenza, segue che:

- *Massimo principale* per $\alpha = 0$, ossia quando $\sin(\vartheta) = 0$, e quindi quando l'angolo $\vartheta = 0$.
- *Minimi* per $\alpha = n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$, ossia quando si ha che:

$$\sin(\vartheta) = n \frac{\lambda}{a} \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}$$

- *Massimi secondari* per $\alpha = \tan(\alpha)$.

Di nuovo tramite considerazioni trigonometriche, considerando la situazione reale del fascio laser puntato lungo una singola fenditura rettangolare parallela ad uno schermo posto ad una grande distanza L rispetto all'apertura a della fenditura, nell'approssimazione di angoli piccoli, ossia per $\sin(\vartheta) \approx \tan(\vartheta) \approx \vartheta$, è possibile ricavare con facilità la posizione dei minimi lungo lo schermo, sfruttando la relazione:

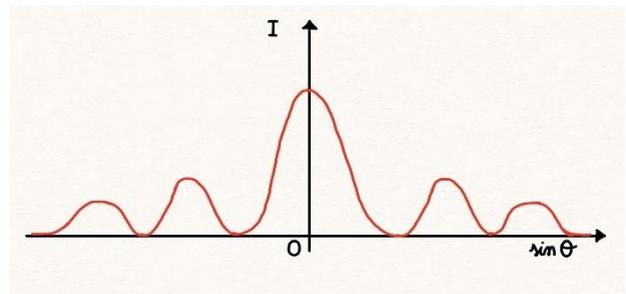


Grafico qualitativo di $I(\vartheta)$ per la singola fenditura

$$y_n = L \tan \vartheta \approx L \sin \vartheta$$

E di conseguenza, dalla relazione sui minimi ricavata dallo studio della derivata, si ha che:

$$y_n = \frac{n\lambda}{a} L \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}$$

Ritornando in un'ultima istanza al caso della doppia fenditura, osserviamo che le frange luminose che appaiono sullo schermo sono dovute alla somma dei fenomeni di diffrazione (dovuto allo spessore a non trascurabile delle due fenditure) e di interferenza tra le due sorgenti di luce S_1 ed S_2 che partono dalle fenditure con uno sfasamento costante. La funzione intensità luminosa reale per la doppia fenditura dovrà dunque contenere entrambi i fenomeni ottici, ed essa ha seguente espressione compatta:

$$I(\vartheta) = I_0 \frac{\sin^2(\alpha)}{\alpha^2} \cos^2(\gamma) \quad \text{con } \alpha = \frac{\delta}{2} = \frac{\pi a}{\lambda} \sin(\vartheta) \quad \text{e} \quad \text{con } \gamma = \frac{\Delta}{2} = \frac{\pi d}{\lambda} \sin(\vartheta)$$

Tuttavia, osservando il grafico, si può notare che questa modifica non cambia la posizione dei massimi e dei minimi di interferenza, ma la loro intensità luminosa viene "guidata" dall'andamento dell'involuppo di diffrazione coi massimi principali e secondari d'interferenza.

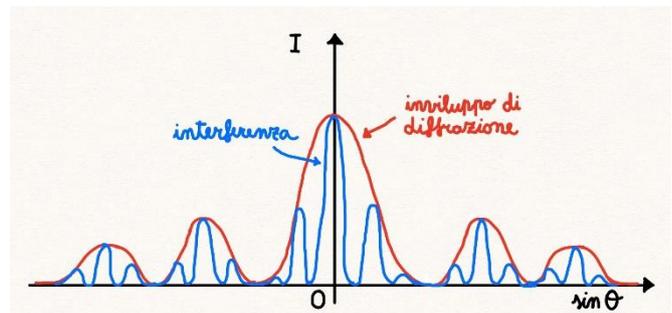


Grafico qualitativo di $I(\vartheta)$ per la doppia fenditura reale

PROCEDIMENTO:



Setup Sperimentale 1 – Alberto Bassanoni



Setup Sperimentale 2 – Leonardo Celada



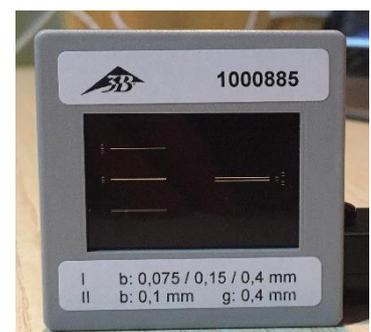
Disposizione del laser 1 – Alberto Bassanoni



Disposizione del laser 2 – Leonardo Celada

Per la realizzazione dell'esperienza della doppia fenditura di Young e della singola fenditura di Fraunhofer si è deciso di utilizzare la medesima strumentazione e il medesimo set-up sperimentale, qui riportato nelle foto. In particolare, la strumentazione utilizzata è la seguente:

- Un puntatore laser a luce rossa di lunghezza d'onda $\lambda = 650 \text{ nm}$;
- Uno schermo con doppia / singole fenditure di differente apertura;
- Un metro da carpentiere;
- Un righello;
- Fogli di carta;
- Scatoloni / libri;
- Supporto mobile per la fenditura (colonna o sgabello);
- Scotch;
- Supporto fisso per il laser (comodino o termosifone);
- Specchio mobile;
- Biro e matita;



Zoom sullo schermo, su cui sono riportati i valori di apertura e di distanza tra le fenditure

Descriviamo qui la creazione del set-up sperimentale:

- Il primo passo effettuato è stata la disposizione della sorgente di luce, ricercando nella propria stanza una parete su cui proiettare il fascio di luce, dei mobili o dei sostegni fissi su cui poter apporre il laser. Un primo test importante per verificare la corretta ortogonalità del laser alla parete è stato eseguito mediante uno specchio riflettente, apposto contro il muro e contro cui è stato puntato il raggio laser. Per fare in modo che il fascio di luce sia perfettamente ortogonale alla parete, si è cercata l'inclinazione giusta del puntatore finanche lo specchio non andrà a riflettere il fascio all'interno della sorgente stessa del laser. Fatto questo, il puntatore laser è stato fissato tramite sostegni fissi (scotch, soprammobili) nella posizione prescelta, la più lontana possibile dal muro su cui si andranno a realizzare le figure di interferenza e di diffrazione. (Per maggiori dettagli sulla disposizione del fascio di luce laser si veda l'allegato video)
- Il secondo passo è stata la disposizione dello schermo con le doppie fenditure, che è stato realizzato apponendo lo schermo su dei sostegni mobili (una colonna e uno sgabello) e alzato mediante alcuni libri o scatoloni di modo da far raggiungere alle fenditure la stessa altezza del fascio laser. Dopodiché, fissando le fenditure ai libri e alle scatole mediante scotch, attraverso un metro da carpentiere si è misurata la distanza delle fenditure dal muro, ed è stato effettuato un ulteriore test preliminare: per verificare che lo schermo sia parallelo con la parete, sfruttando il fatto che la lamina che lo compone è una superficie riflettente, si è andati alla ricerca della giusta inclinazione dello schermo, utilizzando come riferimento il riflesso del laser su di esso, che ancora una volta è stato fatto collimare all'interno della sorgente di luce stessa sfruttando il fenomeno della riflessione.
- Il terzo passo è stata la creazione dell'apparato per la misurazione dei massimi e dei minimi di interferenza e diffrazione. Sono stati appesi e fissati ai quattro lati tramite scotch alla parete scelta come schermo dei fogli bianchi, su cui si proietteranno le frange luminose, che verranno annotate con un segno tramite biro o matita, e successivamente, a esperimento concluso, verranno misurate le distanze (tra i massimi per l'interferenza, tra i minimi per la diffrazione) dal massimo centrale, preso come riferimento zero per la misurazione.

A questo punto, è possibile dare il via all'esperimento. L'obiettivo che si siamo posti è stato il calcolo della lunghezza d'onda del fascio di luce laser sperimentalmente, già noto il risultato teorico con cui poter effettuare un confronto. Abbiamo deciso inoltre di fare un confronto qualitativo dei profili d'intensità ottenuti nell'esperienza con i profili d'intensità teorici, per verificare la consistenza delle nostre figure di interferenza e diffrazione con quelle previste. Il calcolo della lunghezza d'onda verrà effettuato in due modalità: attraverso l'interferenza da doppia fenditura; attraverso la diffrazione da singola fenditura; In ambo le misure si daranno per buoni i valori di apertura e di distanza tra le fenditure fornite dalla strumentazione, e si andrà a contare la distanza delle frange dal massimo centrale, variando la distanza L tra parete e schermo con le fenditure. Per avere una più vasta gamma di misure da elaborare, si è deciso di effettuare le stesse misurazioni a distanze diverse ($2 \leq L \leq 3$ metri Celada - $3 \leq L \leq 4$ metri Bassanoni), utilizzando la misura comune di $L = 3$ metri per verificare reciprocamente la consistenza dei dati ottenuti.

Iniziando con la doppia fenditura, sono state prese misure variando la distanza L di ogni $0,2$ metri. Per effettuare la misura, fissata la distanza, e usando il foglio poggiato sul muro, si va a segnare con una biro la posizione del massimo centrale, e con la matita la posizione di tutti i massimi visibili, sia a destra e che a sinistra. A quel punto, cambiando foglio e cambiando la distanza, si prosegue fino ad aver raggiunto cinque set di dati sulle posizioni delle frange chiare.

Passando alla singola fenditura, sono state prese misure variando la distanza L di ogni $0,25$ metri. Per effettuare la misura, fissata la distanza, e usando il foglio poggiato sul muro, si va a segnare con una biro la posizione del massimo centrale, e con la matita la posizione di tutti i minimi visibili, sia a destra che a sinistra. A quel punto, cambiando foglio e cambiando la distanza, si prosegue fino ad aver raggiunto quattro set di dati sulle posizioni dei minimi di diffrazione. Lo stesso procedimento è stato effettuato per tutte e tre le singole fenditure di diversa ampiezza a disposizione sullo schermo, ottenendo in complessivo 12 set di dati diversi per ognuno.

A questo punto, si passa alla fase di acquisizione ed elaborazione dei dati (si andrà a collimare in un'unica raccolta tutti i dati acquisiti da entrambi). Per l'interferenza sono stati selezionati alcuni massimi di riferimento, l'ottavo e il sedicesimo massimo partendo il conteggio da quello appena successivo al massimo centrale, e attraverso un righello fissato nello zero dalla posizione del massimo centrale segnato a biro si è misurata la distanza dall'ottavo e dal sedicesimo massimo per tutti e cinque i set di dati. Per la diffrazione si è fatto in maniera analoga, selezionando la distanza del terzo minimo acquisito dal massimo centrale, e mediante righello si è misurata la distanza per tutti e dodici i set di dati. Acquisiti i dati necessari, ponendosi nella condizione di piccoli angoli (ragionevolmente, essendo le lunghezze L scelte, nell'ordine del metro, molto maggiori alle distanze tra le fenditure e le loro aperture, nell'ordine del decimo di millimetro), è possibile utilizzare le relazioni trigonometriche ottenute nella teoria per la distanza tra i massimi e i minimi col massimo centrale nell'interferenza e nella diffrazione e costruire diversi *fitting lineari* per calcolare la lunghezza d'onda λ tramite Origin:

$$y_n = \lambda \frac{nL}{d} \quad \Leftrightarrow \quad Y = MX \quad (\text{per la doppia fenditura con } n = 8 ; 16)$$

$$y_n = \lambda \frac{nL}{a} \quad \Leftrightarrow \quad Y = MX \quad (\text{per la singola fenditura con } n = 3)$$

Per il calcolo degli errori, sono state prese come incertezze su tutte le misure la sensibilità degli strumenti di misura (del metro e del righello) e per i dati geometrici un'unità sull'ultima cifra significativa, e per il calcolo dell'errore sul coefficiente angolare M si è fatto uso del metodo dei minimi quadrati. Si farà infine una media dei cinque valori della lunghezza d'onda λ , mediando anche l'errore tramite la semplice teoria di propagazione degli errori.

Come ultima aggiunta, verrà effettuato un confronto qualitativo delle immagini di interferenza e diffrazione ottenute col profilo d'intensità teorica della doppia fenditura e della singola fenditura, costruendo le funzioni $I(\vartheta)$ col programma grafico GeoGebra e utilizzando i dati geometrici forniti dall'apertura e dalla distanza tra le fenditure.

CALCOLI:

Interferenza da doppia fenditura:

Caso 1: ottavo massimo

Distanza tra le due fenditure: $d = (4,0 \pm 0,1) \cdot 10^{-4}m$

Distanza D dell'ottavo massimo(n=8) dal massimo principale(n=0) in relazione alla distanza L tra diaframma e schermo:

L (metri)	Errore L (metri)	D (metri)	Errore D (metri)
2,00	±0,01	0,021	±0,001
2,20	±0,01	0,023	±0,001
2,40	±0,01	0,025	±0,001
2,60	±0,01	0,028	±0,001
2,80	±0,01	0,030	±0,001
3,00	±0,01	0,032	±0,001
3,20	±0,01	0,035	±0,001
3,40	±0,01	0,037	±0,001
3,60	±0,01	0,040	±0,001
3,80	±0,01	0,043	±0,001
4,00	±0,01	0,046	±0,001

Regressione Lineare:

$$D = \frac{8 \cdot \lambda}{d} \cdot L \rightarrow Y = m \cdot X \rightarrow Y = D; X = \frac{8L}{d}; m = \lambda$$

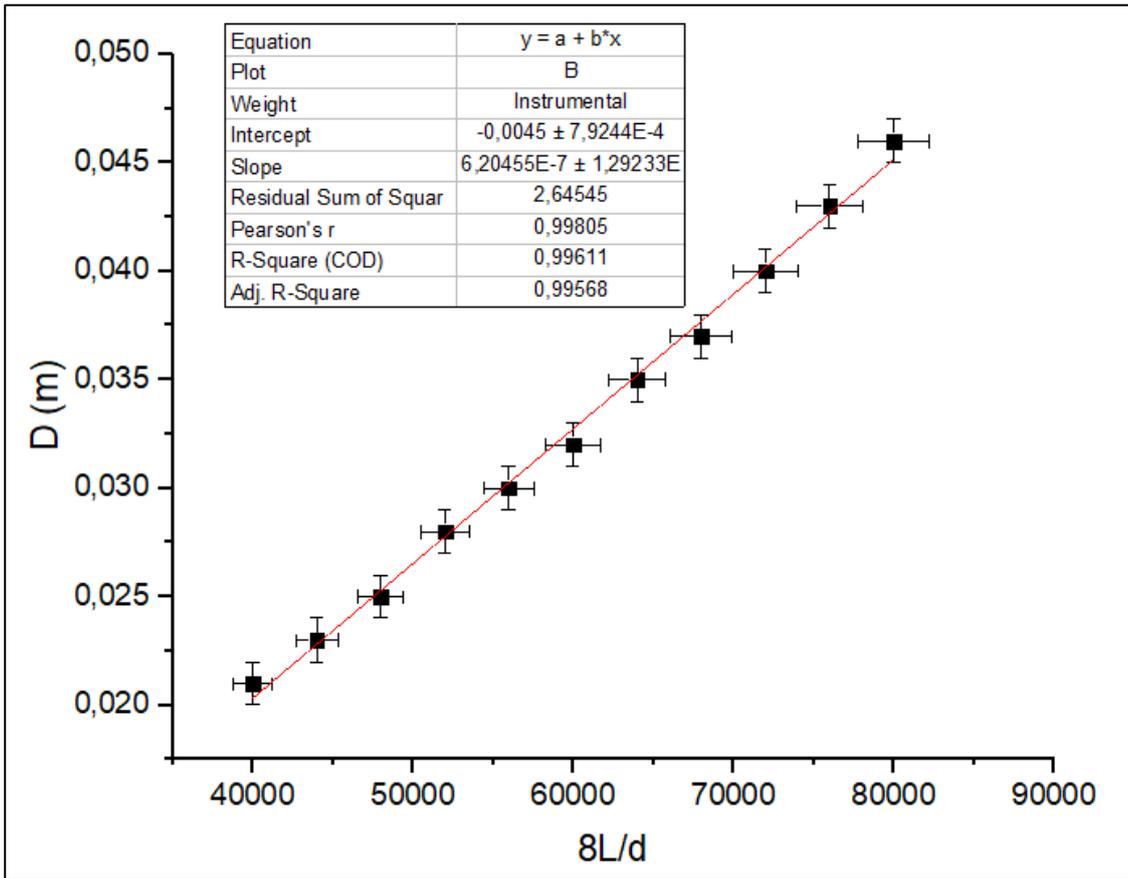
Errore sulle X:

$$\delta X = |X| * \left(\frac{\delta L}{|L|} + \frac{\delta d}{|d|} \right)$$

Dati:

A(X)	B(Y)	C(xEr±)	D(yEr±)
8L/d	D	ErrX	ErrY
m	m	m	m
40000	0,021	1200	0,001
44000	0,023	1300	0,001
48000	0,025	1400	0,001
52000	0,028	1500	0,001
56000	0,03	1600	0,001
60000	0,032	1700	0,001
64000	0,035	1800	0,001
68000	0,037	1900	0,001
72000	0,04	2000	0,001
76000	0,043	2100	0,001
80000	0,046	2200	0,001

Grafico:



Da cui si ricava:

$$m = \lambda = (620 \pm 13) \cdot 10^{-9} m$$

CONSIDERAZIONI APPROSSIMAZIONE DEL PICCOLO ANGOLO:

$$D = L \cdot \tan(\vartheta) \rightarrow \arctan\left(\frac{D}{L}\right) = \vartheta$$

IPOTESI DI PICCOLO ANGOLO					
L	D=Max n=8 m	D/L=Tan(Teta)	Teta= ArcTan(D/L)	Sin(Teta)	
2,00	0,021	0,0105	0,010499614	0,010499	
2,2	0,023	0,010454545	0,010454165	0,010454	
2,4	0,025	0,010416667	0,01041629	0,010416	
2,60	0,028	0,010769231	0,010768814	0,010769	
2,8	0,03	0,010714286	0,010713876	0,010714	
3	0,032	0,010666667	0,010666262	0,010666	
3,20	0,035	0,0109375	0,010937064	0,010937	
3,4	0,037	0,010882353	0,010881923	0,010882	
3,6	0,04	0,011111111	0,011110654	0,011111	
3,8	0,043	0,011315789	0,011315307	0,011315	
4	0,046	0,0115	0,011499493	0,011499	

Si vede chiaramente dalla tabella qui sopra riportata che per ogni misura effettuata l'approssimazione di piccolo angolo è consistente.

$$\tan(\vartheta) \approx \sin(\vartheta) \approx \vartheta$$

Caso 2: sedicesimo massimo

Distanza tra le due fenditure: $d = (4,0 \pm 0,1) \cdot 10^{-4}m$

Distanza D del sedicesimo massimo (n=16) dal massimo principale (n=0) in relazione alla distanza L tra diaframma e schermo:

L (metri)	Errore L (metri)	D (metri)	Errore D (metri)
2,00	±0,01	0,042	±0,001
2,20	±0,01	0,047	±0,001
2,40	±0,01	0,051	±0,001
2,60	±0,01	0,056	±0,001
2,80	±0,01	0,060	±0,001
3,00	±0,01	0,064	±0,001
3,20	±0,01	0,071	±0,001
3,40	±0,01	0,075	±0,001
3,60	±0,01	0,081	±0,001
3,80	±0,01	0,085	±0,001
4,00	±0,01	0,090	±0,001

Regressione Lineare:

$$D = \frac{16 \cdot \lambda}{d} \cdot L \rightarrow Y = m \cdot X \rightarrow Y = D ; X = \frac{16L}{d} ; m = \lambda$$

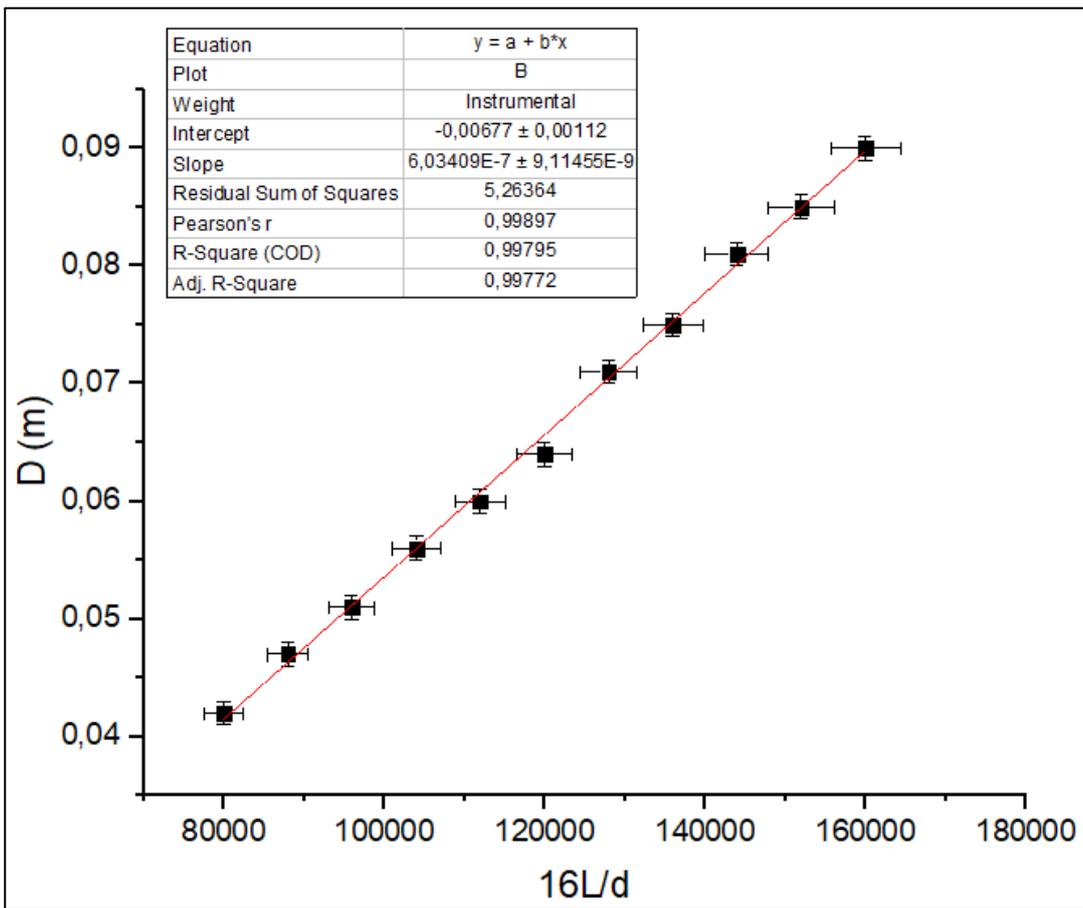
Errore sulle X

$$\delta X = |X| * \left(\frac{\delta L}{|L|} + \frac{\delta d}{|d|} \right)$$

Dati

A(X)	B(Y)	C(xEr±)	D(yEr±)
8L/d	D	ErrX	ErrY
m	m	m	m
80000	0,042	2380	0,001
88000	0,047	2582	0,001
96000	0,051	2784	0,001
104000	0,056	2971	0,001
112000	0,06	3173	0,001
120000	0,064	3375	0,001
128000	0,071	3565	0,001
136000	0,075	3767	0,001
144000	0,081	3960	0,001
152000	0,085	4153	0,001
160000	0,09	4347	0,001

Grafico:



Da cui si ricava:

$$m = \lambda = (603 \pm 9) \cdot 10^{-9} m$$

CONSIDERAZIONI APPROSSIMAZIONE DEL PICCOLO ANGOLO:

$$D = L \cdot \tan(\vartheta) \rightarrow \arctan\left(\frac{D}{L}\right) = \vartheta$$

IPOTESI DI PICCOLO ANGOLO					
L	D= Max n=16 m	D/L=Tan(Teta)	Teta=ArcTan(D/L)	Sin(Teta)	
2,00	0,042	0,021	0,020996914	0,020995	
2,2	0,047	0,021363636	0,021360387	0,021359	
2,4	0,051	0,02125	0,021246802	0,021245	
2,60	0,056	0,021538462	0,021535132	0,021533	
2,8	0,06	0,021428571	0,021425292	0,021424	
3	0,064	0,021333333	0,021330098	0,021328	
3,20	0,071	0,0221875	0,02218386	0,022182	
3,4	0,075	0,022058824	0,022055247	0,022053	
3,6	0,081	0,0225	0,022496204	0,022494	
3,8	0,085	0,022368421	0,022364692	0,022363	
4	0,09	0,0225	0,022496204	0,022494	

Si vede chiaramente dalla tabella qui sopra riportata che per ogni misura effettuata l'approssimazione di piccolo angolo è consistente.

$$\tan(\vartheta) \approx \sin(\vartheta) \approx \vartheta$$

Diffrazione da singola fenditura:

Caso 1: fenditura piccola (0,075mm)

Apertura della fenditura: $a = (7,5 \pm 0,1) \cdot 10^{-5}m$

Distanza D del terzo massimo(n=3) dal massimo principale(n=0) in relazione alla distanza L tra diaframma e schermo:

L (metri)	Errore L (metri)	D (metri)	Errore D (metri)
2,25	±0,01	0,064	±0,001
2,50	±0,01	0,073	±0,001
2,75	±0,01	0,083	±0,001
3,00	±0,01	0,090	±0,001
3,25	±0,01	0,097	±0,001
3,50	±0,01	0,102	±0,001
3,75	±0,01	0,106	±0,001
4,00	±0,01	0,113	±0,001

Regressione Lineare:

$$D = \frac{3 \cdot \lambda}{a} \cdot L \rightarrow Y = m \cdot X \rightarrow Y = D ; X = \frac{3L}{a} ; m = \lambda$$

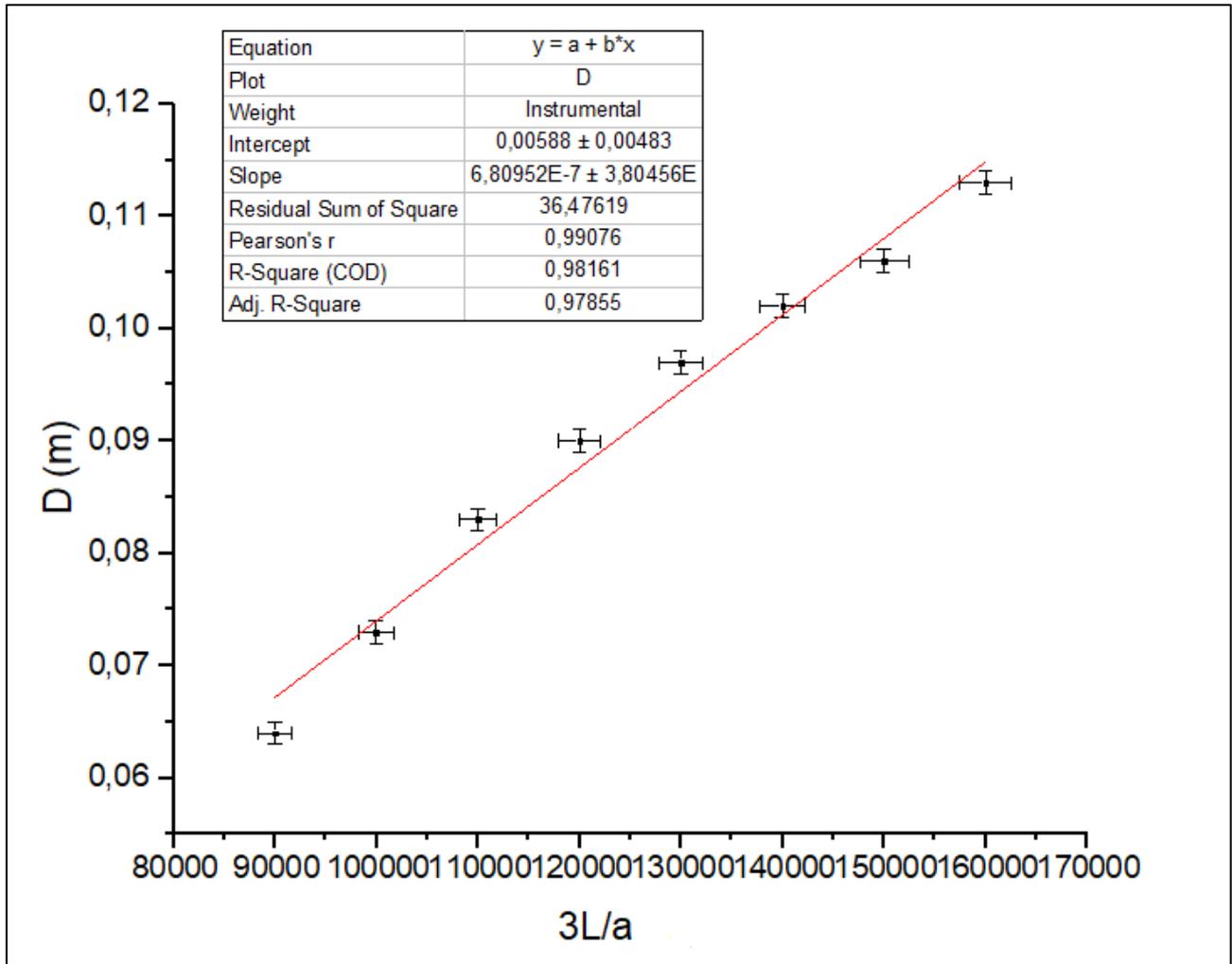
Errore sulle X

$$\delta X = |X| * \left(\frac{\delta L}{|L|} + \frac{\delta a}{|a|} \right)$$

Dati:

A(X)	B(Y)	C(xEr±)	D(yEr±)
3L/a	D	ErrX	ErrY
m	m	m	m
90000	0,064	1600	0,001
100000	0,073	1733	0,001
110000	0,083	1866	0,001
120000	0,09	2000	0,001
130000	0,097	2133	0,001
140000	0,102	2266	0,001
150000	0,106	2400	0,001
160000	0,113	2533	0,001

Grafico:



Da cui si ricava:

$$m = \lambda = (680 \pm 38) \cdot 10^{-9} m$$

Caso 2: fenditura media (0,15mm)

Apertura della fenditura: $a = (1,5 \pm 0,1) \cdot 10^{-4}m$

Distanza D del terzo massimo(n=3) dal massimo principale(n=0) in relazione alla distanza L tra diaframma e schermo:

L (metri)	Errore L (metri)	D (metri)	Errore D (metri)
2,25	±0,01	0,030	±0,001
2,50	±0,01	0,033	±0,001
2,75	±0,01	0,036	±0,001
3,00	±0,01	0,039	±0,001
3,25	±0,01	0,041	±0,001
3,50	±0,01	0,046	±0,001
3,75	±0,01	0,050	±0,001
4,00	±0,01	0,052	±0,001

Regressione Lineare:

$$D = \frac{3 \cdot \lambda}{a} \cdot L \rightarrow Y = m \cdot X \rightarrow Y = D; X = \frac{3L}{a}; m = \lambda$$

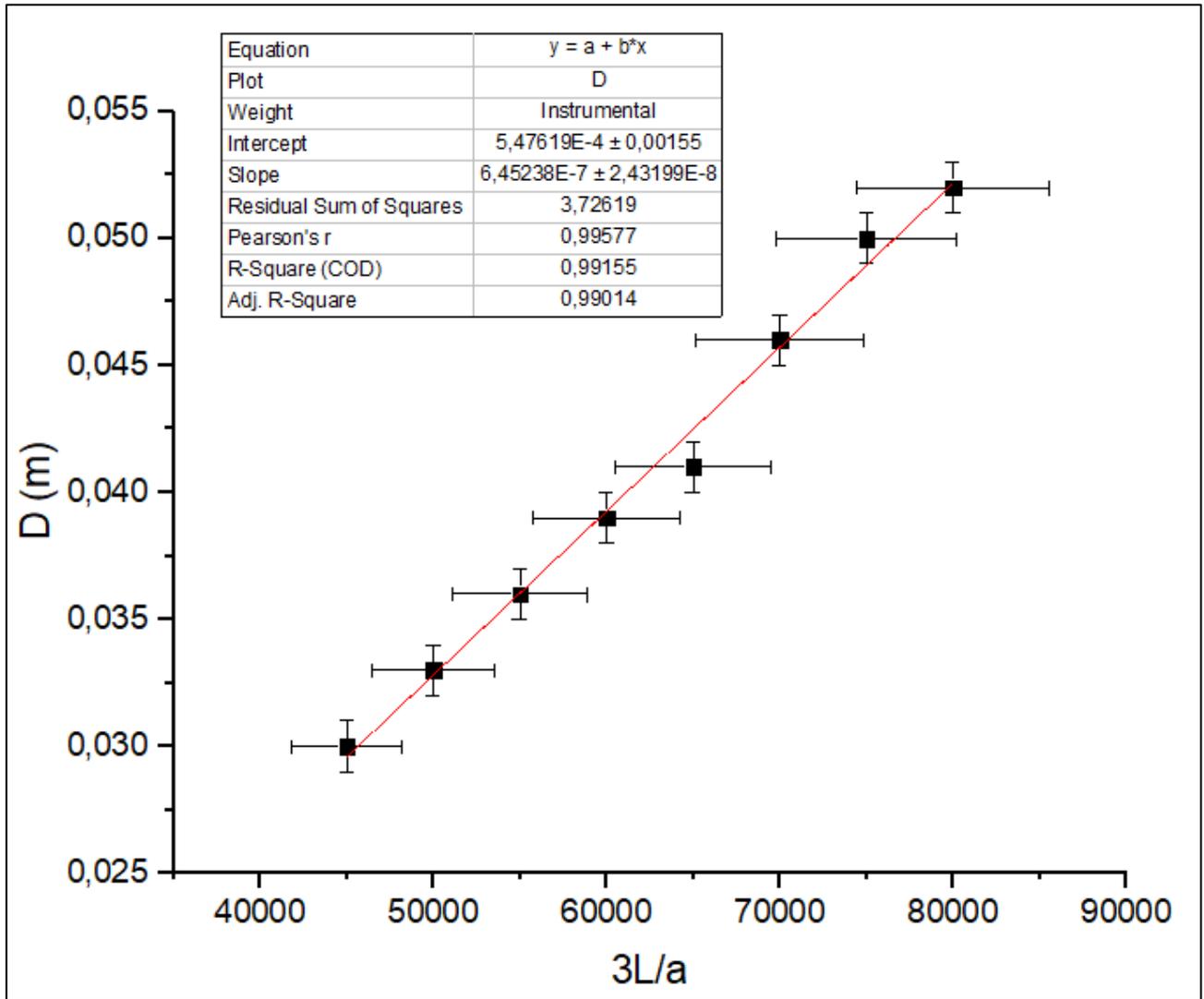
Errore sulle X

$$\delta X = |X| * \left(\frac{\delta L}{|L|} + \frac{\delta a}{|a|} \right)$$

Dati:

A(X)	B(Y)	C(xEr±)	D(yEr±)
3L/a	D	ErrX	ErrY
	m	m	m
45000	0,03	3200	0,001
50000	0,033	3533	0,001
55000	0,036	3866	0,001
60000	0,039	4200	0,001
65000	0,041	4533	0,001
70000	0,046	4866	0,001
75000	0,05	5200	0,001
80000	0,052	5533	0,001

Grafico:



Da cui si ricava:

$$m = \lambda = (645 \pm 24) \cdot 10^{-9}m$$

Caso 3: fenditura grande (0,40mm)

Apertura della fenditura: $a = (4,0 \pm 0,1) \cdot 10^{-4}m$

Distanza D del terzo massimo(n=3) dal massimo principale(n=0) in relazione alla distanza L tra diaframma e schermo:

L (metri)	Errore L (metri)	D (metri)	Errore D (metri)
2,25	±0,01	0,011	±0,001
2,50	±0,01	0,013	±0,001
2,75	±0,01	0,015	±0,001
3,00	±0,01	0,016	±0,001
3,25	±0,01	0,017	±0,001
3,50	±0,01	0,018	±0,001
3,75	±0,01	0,020	±0,001
4,00	±0,01	0,021	±0,001

Regressione Lineare:

$$D = \frac{3 \cdot \lambda}{a} \cdot L \rightarrow Y = m \cdot X \rightarrow Y = D; X = \frac{3L}{a}; m = \lambda$$

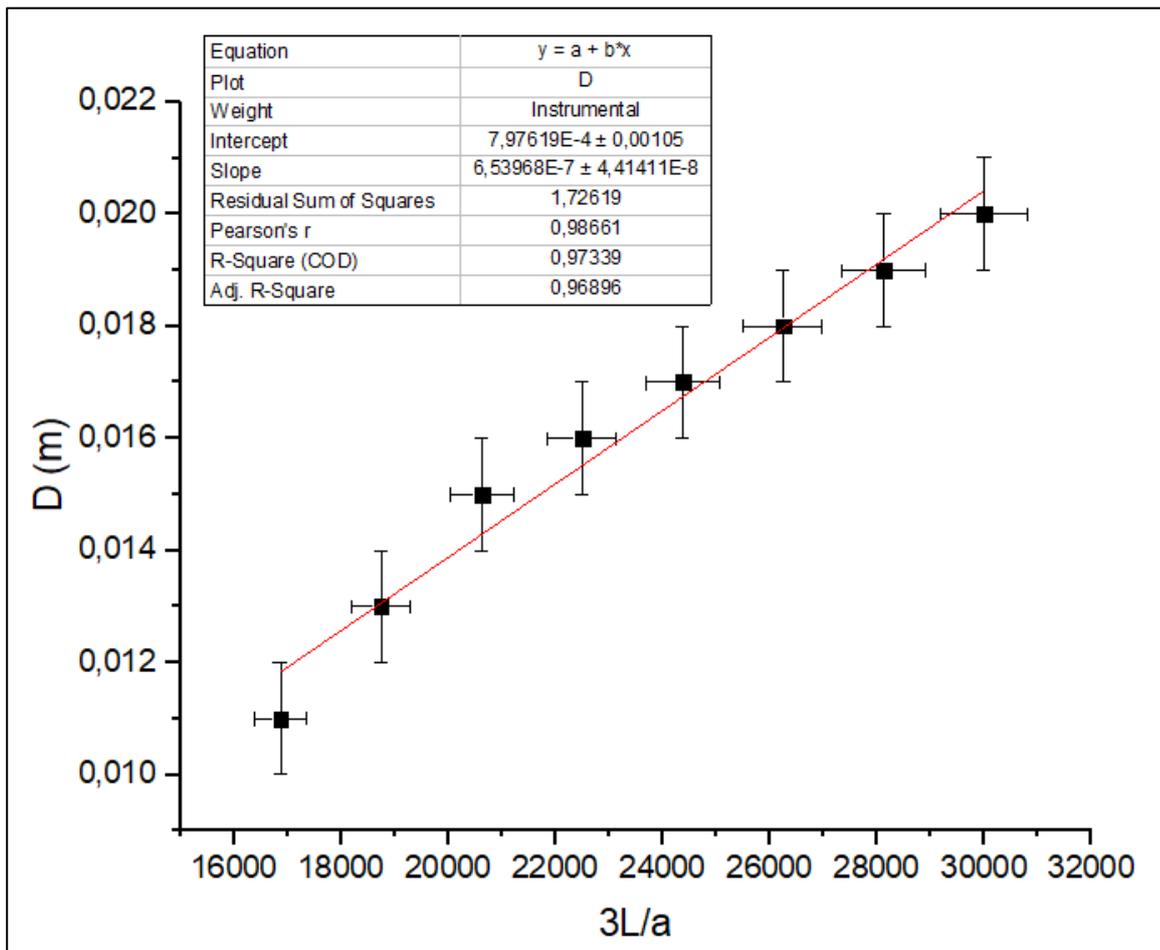
Errore sulle X

$$\delta X = |X| * \left(\frac{\delta L}{|L|} + \frac{\delta a}{|a|} \right)$$

Dati:

A(X)	B(Y)	C(xEr±)	D(yEr±)
3L/a	D	ErrX	ErrY
	m	m	m
16875	0,011	496	0,001
18750	0,013	544	0,001
20625	0,015	590	0,001
22500	0,016	637	0,001
24375	0,017	684	0,001
26250	0,018	731	0,001
28125	0,019	778	0,001
30000	0,02	825	0,001

Grafico:



Da cui si ricava:

$$m = \lambda = (653 \pm 44) \cdot 10^{-9}m$$

Valore medio di λ ottenuto:

Chiameremo rispettivamente i cinque valori di lambda ottenuti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ e λ_5

$$\lambda_{medio} = \frac{\sum_{i=1}^5 \left(\lambda_i \cdot \frac{1}{\sigma_i^2} \right)}{\sum_{i=1}^5 \left(\frac{1}{\sigma_i^2} \right)} = (615) \cdot 10^{-9}m$$

$$\sigma \lambda_{medio} = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^5 \left(\frac{1}{\sigma_i^2} \right)}} = 65 \cdot 10^{-9}m$$

$$\lambda_{medio} = (615 \pm 65) \cdot 10^{-9}m$$

Confronto qualitativo:

Profilo d'intensità per la interferenza da doppia fenditura:

Il profilo d'onda è stato ottenuto teoricamente utilizzando la seguente formula:

$$I(\theta) = 4I_0 \cdot \frac{\sin^2(\alpha)}{\alpha^2} \cdot \cos^2(\gamma)$$

$$\text{dove } \alpha = \frac{\pi}{\lambda} l \cdot \sin(\theta) \text{ e } \gamma = \frac{\pi}{\lambda} d \cdot \sin(\theta)$$

$$\frac{I(\theta)}{I_0} = 4 \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda} l \cdot \sin(\theta)\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda} l \cdot \sin(\theta)\right)^2} \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda} d \cdot \sin(\theta)\right) \rightarrow y = 4 \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda} l \cdot \sin(x)\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda} l \cdot \sin(x)\right)^2} \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda} d \cdot \sin(x)\right)$$

Dove i valori di l , d e λ sono:

$$\text{Larghezza delle due fenditure: } l = 1 \cdot 10^{-4} m$$

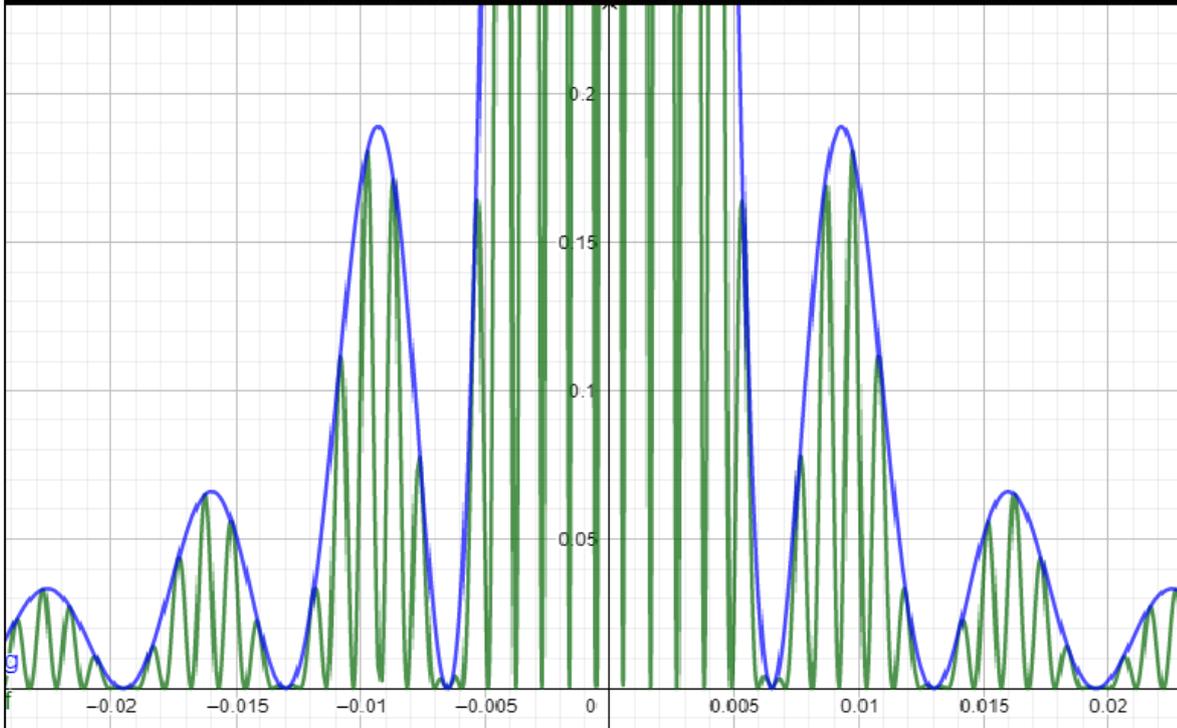
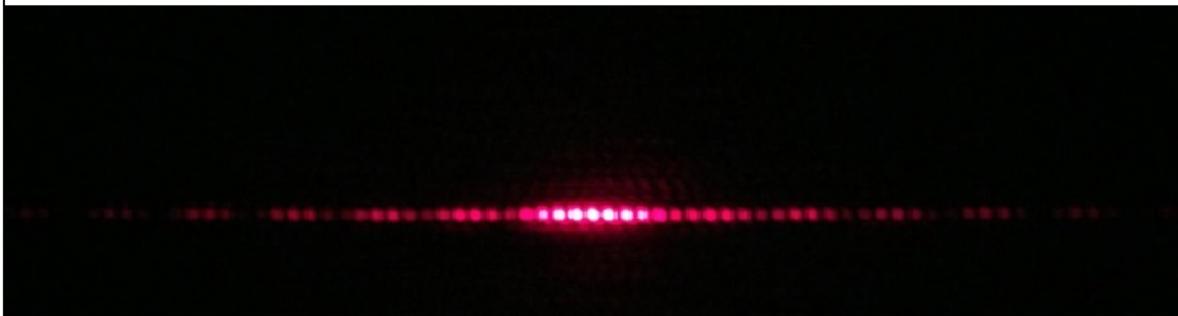
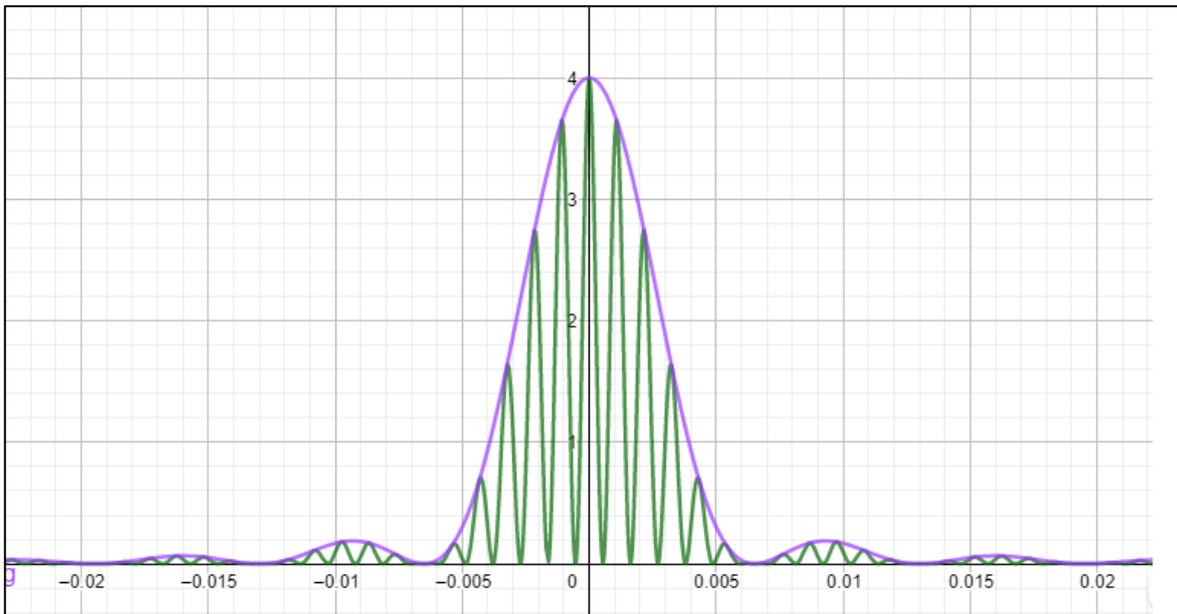
$$\text{Distanza tra le due fenditure: } d = 6,0 \cdot 10^{-4} m$$

$$\text{Lunghezza d'onda: } \lambda = 650 \cdot 10^{-9} m$$

Il grafico mostra anche l'involuppo di diffrazione.

Nota Importante: Nella costruzione della figura teorica delle frange di interferenza modulate dall'involuppo di diffrazione il rapporto d/l utilizzato per la funzione dell'intensità luminosa teorica è pari a sei, e non a quattro (come dovrebbe essere dai dati forniti sulla doppia fenditura). La scelta è stata fatta in questo modo poiché si è notato che il numero dei massimi d'interferenza modulati dall'involuppo di diffrazione per $d/l = 4$ non corrispondono al numero sperimentale dei massimi registrati nelle foto. Questo ci fa sospettare che i dati geometrici riportati sulla fenditura non siano esatti, oppure che la distanza tra le 2 fenditure $d = 4,0 \cdot 10^{-4} m$ sia riferita agli estremi più vicini delle due fenditure (considerando la distanza tra i centri delle due fenditure si arriva a $d = 5,0 \cdot 10^{-4} m$).

$$y = 4 \cdot \frac{\sin^2(483 \cdot \sin(x))}{(483 \cdot \sin(x))^2} \cos^2(2900 \cdot \sin(x))$$



In questa immagine c'è lo stesso grafico ma in due scale differenti.

Profilo d'intensità per la diffrazione da singola fenditura:

Il profilo d'onda è stato ottenuto teoricamente utilizzando la seguente formula:

$$I(\theta) = I_0 \cdot \frac{\sin^2(\alpha)}{\alpha^2} \quad \text{dove} \quad \alpha = \frac{\pi}{\lambda} a \cdot \sin(\theta)$$

$$\frac{I(\theta)}{I_0} = \frac{\sin^2(\alpha)}{\alpha^2} \rightarrow \frac{I(\theta)}{I_0} = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda} a \cdot \sin(\theta)\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda} a \cdot \sin(\theta)\right)^2} \rightarrow y = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda} a \cdot \sin(x)\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda} a \cdot \sin(x)\right)^2}$$

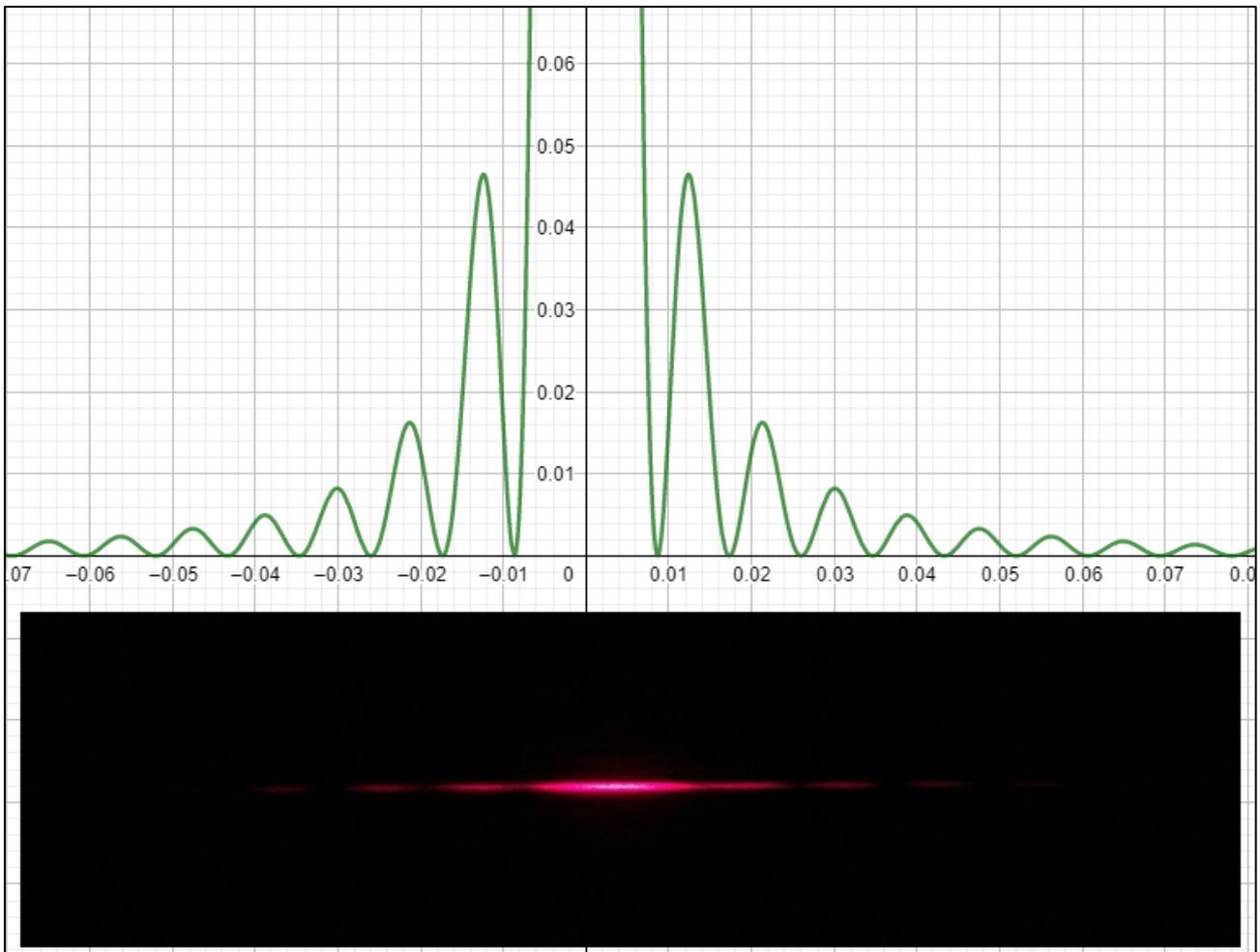
Dove i valori di a (larghezza della singola fenditura) e λ sono:

Lunghezza d'onda: $\lambda = 650 \cdot 10^{-9} m$

$a_{piccola} = 7,5 \cdot 10^{-5} m$; $a_{media} = 1,5 \cdot 10^{-4} m$; $a_{grande} = 4,0 \cdot 10^{-4} m$

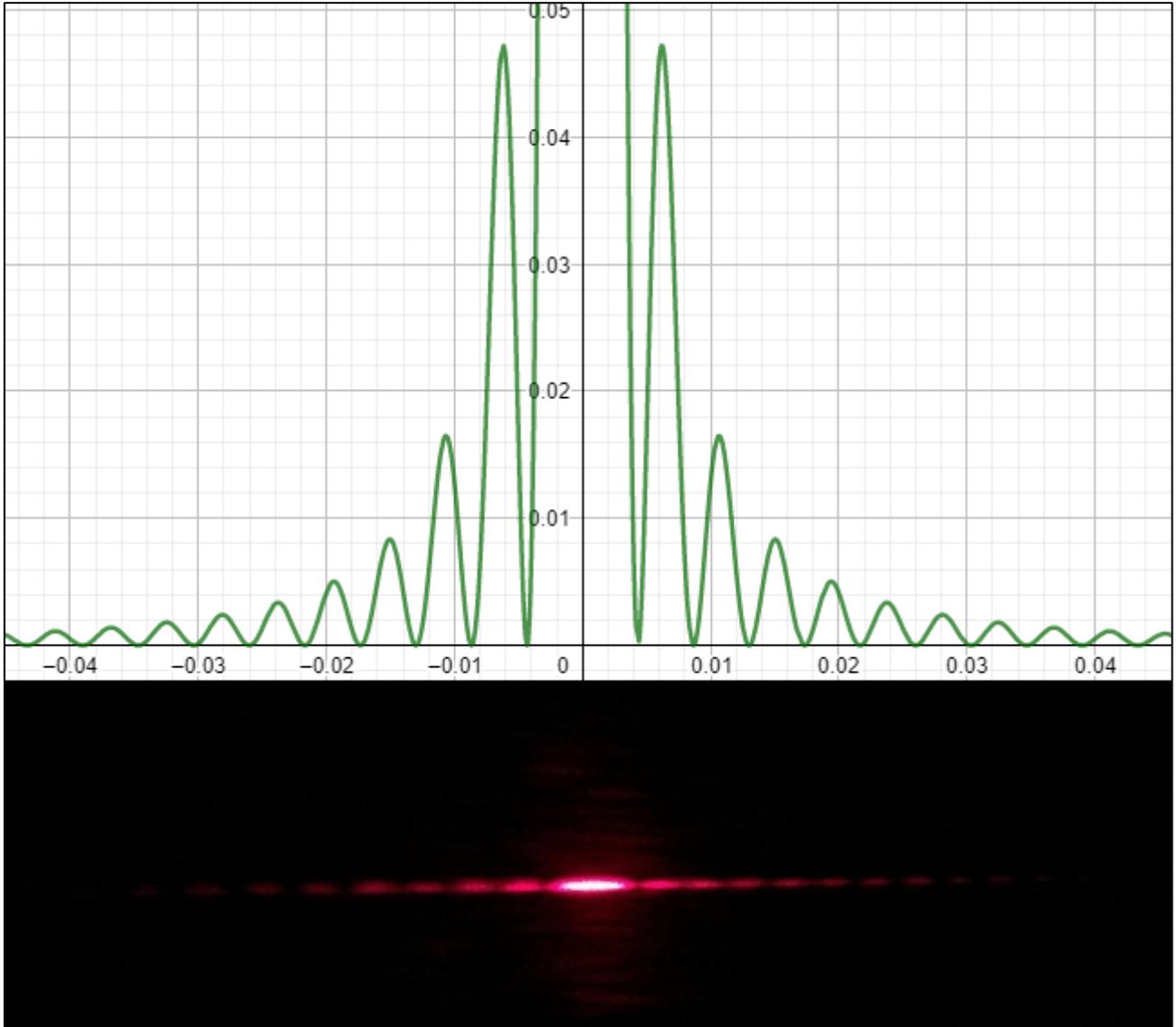
Caso 1: fenditura piccola (0,075mm)

$$y = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda} a \cdot \sin(x)\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda} a \cdot \sin(x)\right)^2} \rightarrow y = \frac{\sin^2(362,5 \cdot \sin(x))}{((362,5) \cdot \sin(x))^2}$$



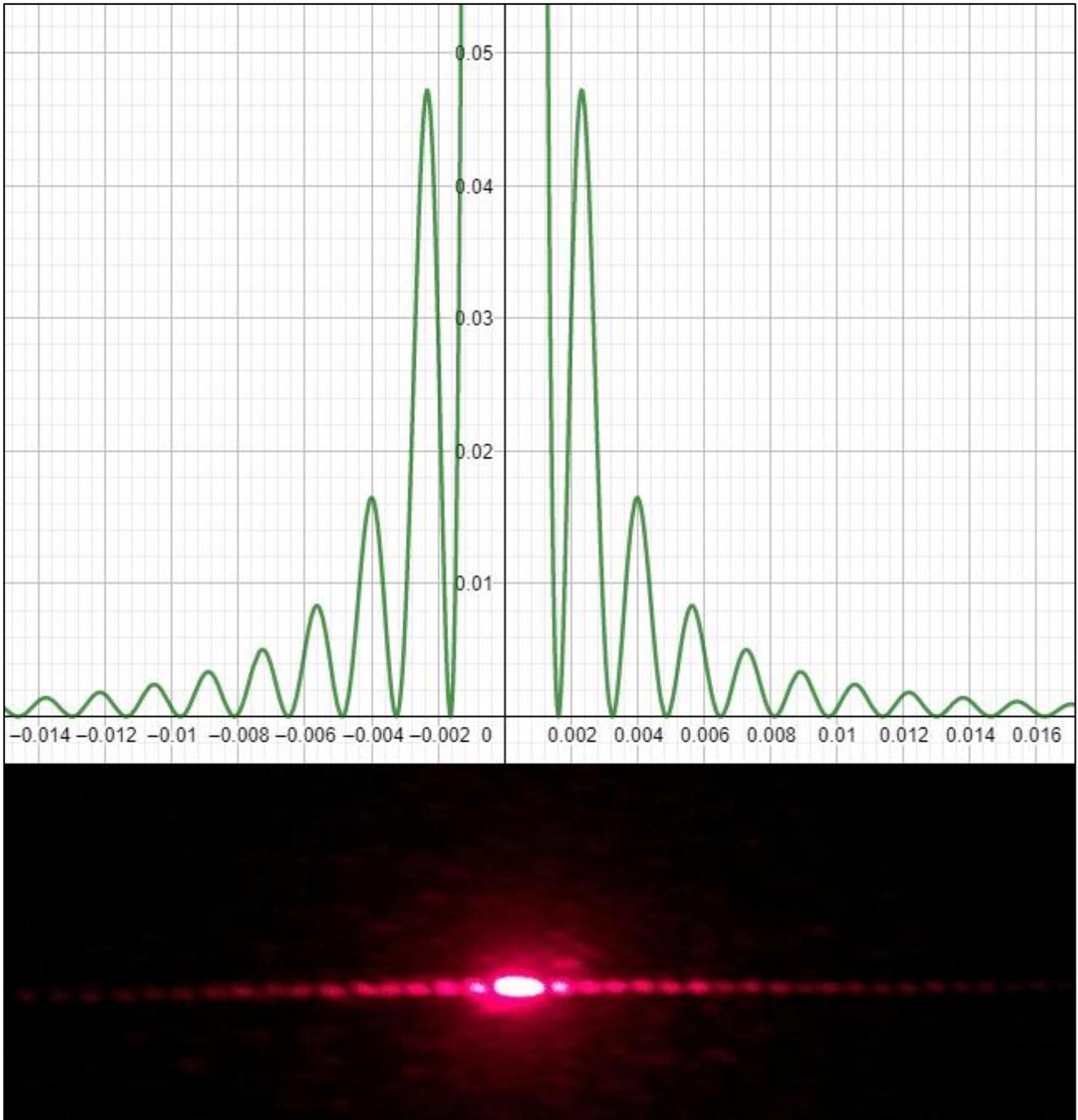
Caso 2: fenditura media (0,15mm)

$$y = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda} a \cdot \sin(x)\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda} a \cdot \sin(x)\right)^2} \rightarrow y = \frac{\sin^2(725 \cdot \sin(x))}{((725) \cdot \sin(x))^2}$$



Caso 3: fenditura grande (0,40mm)

$$y = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda} a \cdot \sin(x)\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda} a \cdot \sin(x)\right)^2} \rightarrow y = \frac{\sin^2(1933 \cdot \sin(x))}{((1933) \cdot \sin(x))^2}$$



CONCLUSIONI:

Il valore sperimentale della lunghezza d'onda del raggio laser, infine ottenuto come media sui cinque valori raccolti, è pari a $\lambda_{exp} = (640 \pm 26) \cdot 10^{-9}m$, che confrontato col valore teorico $\lambda_{teorico} = 650 \cdot 10^{-9}m$ risulta consistente e coerente nei limiti dell'errore sperimentale. Tuttavia, è necessario fare alcune considerazioni sulla natura dell'errore ottenuto sul valore della lunghezza d'onda (pari circa al 4% della misura), un errore abbastanza significativo dovuto a diversi errori casuali e sistematici da cui è affetto l'apparato sperimentale. Proviamo qui a valutarne l'origine, avendo già escluso tra le possibili sorgenti d'errore l'approssimazione di piccolo angolo (vedi controllo fatto sopra):

- Errori Sistematici:

- 1) Nella disposizione del fascio laser e della parete, che potrebbero risultare non perfettamente ortogonali tra loro.
- 2) Negli effetti diffusivi della luce del fascio laser, che rende difficile stimare con precisione la posizione esatta dei massimi e dei minimi sul foglio appeso alla parete.
- 3) Nella limitata precisione degli strumenti di misurazione.

- Errori Casuali:

- 1) Nella lettura e nella segnatura delle posizioni dei massimi e dei minimi sul foglio.
- 2) Nella disposizione tra fascio laser e schermo delle fenditure, che durante gli spostamenti per cambiare la distanza L potrebbe aver causato delle imprecise inclinazioni tra il raggio entrante e la superficie dello schermo, pur effettuando il test della riflessione ogni volta.

Tuttavia, a fronte di queste considerazioni, c'è comunque una buona consistenza tra la teoria e il nostro modello sperimentale. Per quanto riguarda il confronto qualitativo coi profili d'intensità, ci si può limitare soltanto ad un confronto visuale, poiché non avevamo a disposizione uno strumento di misura affidabile per effettuare una stima sperimentale delle intensità luminose delle singole frange, e perciò non è stato possibile ricostruire un profilo d'intensità puramente sperimentale. Tuttavia, tramite confronto visuale si può comunque cogliere una certa consistenza tra le nostre figure d'interferenza e di diffrazione coi modelli teorici, il che dà comunque un certo grado di affidabilità al nostro esperimento.