

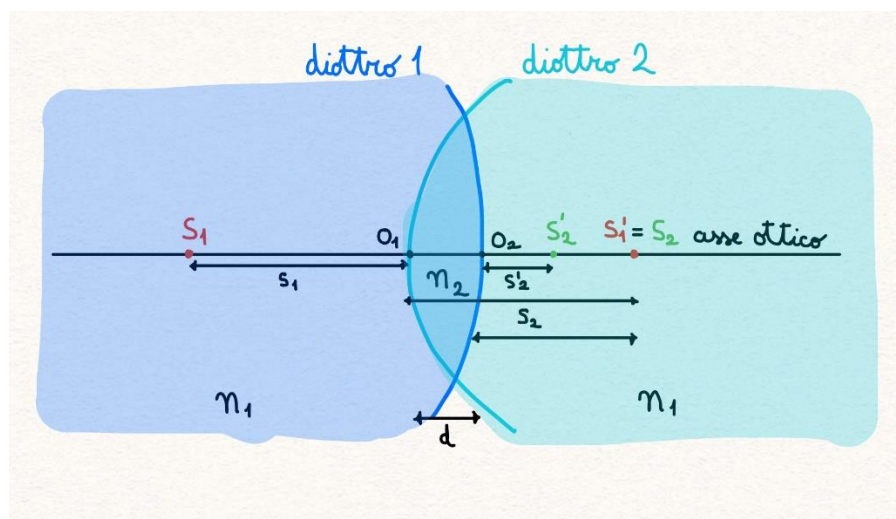
Fuoco di una Lente Convergente:

SCOPO DELL'ESPERIENZA:

Lo scopo dell'esperimento consiste nel calcolo della lunghezza focale e nella determinazione dell'asse ottico di una lente convergente, nel nostro caso una lente d'ingrandimento utilizzata per la lettura, utilizzando tre diversi metodi di misurazione e valutando quale tra i tre si rivelerà il più accurato.

INTRODUZIONE TEORICA:

Per questa terza esperienza sarà necessario conoscere i principi teorici e le leggi fisiche che descrivono il comportamento delle lenti sottili, e per indagare questi oggetti fisici, è necessario richiamare alla base le leggi fondamentali dell'ottica geometrica, ossia le *leggi sulla riflessione e sulla rifrazione di Snell*. Sulla base di queste leggi, precedentemente trattate nella scorsa relazione, e sulla base di un'approssimazione di fondo nei calcoli, l'*approssimazione di Gauss* o approssimazione dei raggi parassiali, che consiste nel considerare gli angoli di apertura dei raggi che collimano sull'asse ottico del piano oggetto e del piano immagine come piccoli, avendo di conseguenza che, essendo α l'angolo, per piccoli angoli si ha che $\cos \alpha \approx 1$ e $\sin \alpha \approx \alpha$.



Rappresentazione schematica di una lente come combinazione di due diottri

Le lenti sottili sono degli strumenti ottici costituiti dalla combinazione di due *diottri* in vetro, un materiale avente indice di rifrazione n_2 rispetto all'indice di rifrazione n_1 dell'ambiente in cui è immerso. Ricordiamo l'equazione caratteristica dei diottri concavi e convessi, che sarà utile per la derivazione dell'equazione delle lenti sottili, supponendo che il materiale vetroso costituente il diottro abbia indice di rifrazione maggiore di quello dell'aria $n_2 > n_1$:

$$\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_2}{s_2} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

Dove s_1 e s_2 sono le distanze dei punti coniugati del diottro lungo l'asse ottico rispetto ad un sistema di riferimento posto nel punto di separazione tra i due mezzi materiali passante per l'asse ottico, mentre r è il raggio di curvatura della superficie iniziale del diottro, assunta come di forma sferica. I fuochi del diottro sono i punti sull'asse ottico del diottro ove vengono concentrati i fasci luminosi di una sorgente di luce posta all'infinito, per effetto della riflessione sulla superficie o della rifrazione, ed è possibile ricavare la posizione focale direttamente dall'equazione del diottro, che portando rispettivamente s_1 oppure s_2 all'infinito, l'altro valore va direttamente a coincidere con il fuoco f_2 o con il fuoco f_1 . Il base al segno del raggio di curvatura, nella convenzione dell'ottica geometrica, se $r > 0$, e quindi di $s_2 > 0$, si parla di diottro convesso (assumendo che la luce proveniente da un mezzo con indice n_1 provenga da sinistra), mentre se $r < 0$, e

quindi di $s_2 < 0$, si parla di diottro concavo (con le stesse assunzioni). Quando si hanno a disposizione delle immagini estese vicine all'asse ottico del diottro, si può parlare di *ingrandimento laterale* dell'immagine, ossia rispetto all'immagine estesa nel piano oggetto si vede un'immagine ingrandita o rimpicciolita nel piano immagine. Considerando l'altezza laterale h_1 dell'immagine incidente nel piano oggetto e l'altezza h_2 dell'immagine ingrandita, attraverso il rapporto tra le due grandezze si va a definire il rapporto d'ingrandimento laterale:

$$m = -\frac{|h_2|}{|h_1|}$$

Applicando ora alcune considerazioni geometriche sui raggi incidenti e rifratti lungo il diottro (concavo o convesso), si ricava con l'adequata convenzione sui segni una relazione del tutto generale per il rapporto d'ingrandimento laterale:

$$m = -\frac{n_1 s_2}{n_2 s_1}$$

A questo punto è possibile iniziare a parlare di lenti, in particolare parleremo di lenti convergenti, ossia lenti formati dalla combinazione di un diottro convesso (a sinistra) e di un diottro concavo (a destra), aventi in generale due diversi raggi di curvatura e con un indice di rifrazione n_2 nella porzione di materiale vetroso racchiuso tra i due diottri, rispetto ad un indice di rifrazione n_1 dell'ambiente in cui sono immersi. Per semplicità, assumiamo che $n_2 = n_{21}$ e che l'indice di rifrazione ambientale sia quello dell'aria, e dunque $n_1 = 1$, e impostiamo l'equazione dei due diottri che compongono la lente, assumendo che il primo diottro abbia raggio di curvatura $r_1 > 0$ (diottro convesso) e il secondo diottro abbia raggio di curvatura $r_2 < 0$ (diottro concavo), e si ha dunque che i due diottri hanno equazioni:

$$\frac{1}{s_1} + \frac{n_{21}}{s_2} = \frac{n_{21} - 1}{r_1} \quad \text{primo diottro (convesso)}$$

$$\frac{n_{21}}{s'_1} + \frac{1}{s'_2} = \frac{1 - n_{21}}{r_2} \quad \text{secondo diottro (concavo)}$$

Ora, essendo d la distanza di separazione tra le due superfici di separazione della lente sull'asse ottico, è possibile riscrivere il punto coniugato $s'_1 = -s_2 + d$. Ciò accade poiché la luce, dalla sorgente di luce S_1 nel piano oggetto, forma una sorgente di luce S_2 nel piano immagine grazie al primo diottro convesso, e a questo punto la sorgente S_2 diviene una nuova sorgente di luce S'_1 in un nuovo piano oggetto, che grazie al secondo diottro concavo produce un'immagine finale virtuale S'_2 sul medesimo spazio. A questo punto utilizziamo l'*approssimazione delle lenti sottili*, ossia poniamo $d \rightarrow 0$, e dunque, a questo punto, sottraendo membro a membro le equazioni dei due diottri si ottiene l'espressione:

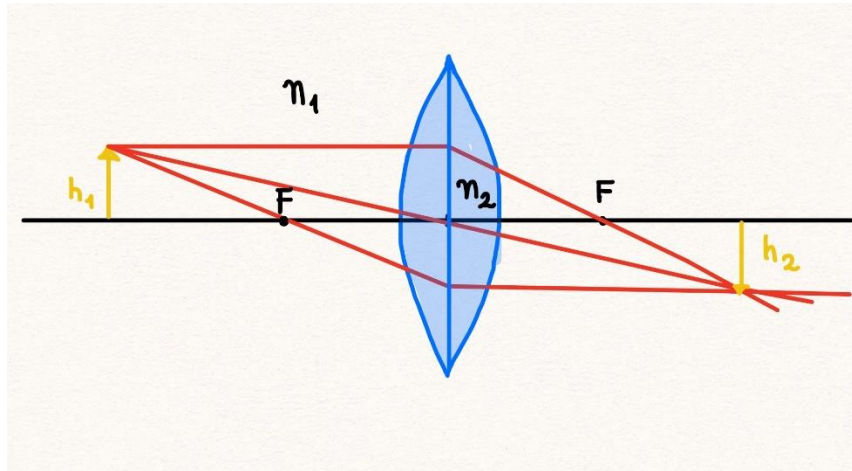
$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s'_2} = (n_{21} - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

E da questa equazione possiamo ottenere le distanze focali, portando le distanze dei punti coniugati s_1 e s'_2 all'infinito, e di conseguenza eseguendo i due limiti per $s_1 \rightarrow \infty$ e per $s'_2 \rightarrow \infty$ si ottiene l'*equazione del costruttore di lenti*:

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f} = (n_{21} - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

E dunque deduciamo che i due fuochi della combinazione dei diottri hanno particolare simmetria e sono gli stessi, $f_1 = f_2 = f$, e sfruttando i primi membri dell'equazione ottengo l'*equazione delle lenti sottili*:

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s'_2} = \frac{1}{f}$$



Rappresentazione schematica dell'ingrandimento di una lente convergente

Si può anche qui ricavare, come fatto con i diottri, il rapporto d'ingrandimento m delle immagini estese per le lenti sottili, ed essendo le lenti una combinazione di due diottri, il rapporto m sarà dato dal prodotto dei rapporti d'ingrandimento m_1 e m_2 dei due diottri, e sfruttando le definizioni date precedentemente per i diottri si ha che:

$$m = m_1 m_2 = \left(-\frac{n_1 s_2}{n_2 s_1} \right) \left(-\frac{n_2 s'_2}{n_1 s'_1} \right) = \left(-\frac{n_1 s_2}{n_2 s_1} \right) \left(-\frac{n_2 s'_2}{n_1 (-s_2 + d)} \right) = \left(\frac{s_2}{s_1} \right) \left(-\frac{s'_2}{-s_2 + d} \right)$$

Utilizzando l'approssimazione delle lenti sottili, e portando $d \rightarrow 0$ si ottiene che:

$$m = \frac{s'_2}{s_1}$$

Ed infine, riscrivendo s'_2 in funzione della lunghezza focale f e della distanza dall'oggetto s_1 , si ricava una formula utile per il rapporto d'ingrandimento:

$$m = \frac{1}{1 - \frac{s_1}{f}}$$

Osserviamo che l'immagine estesa ingrandita dalla lente è capovolta rispetto all'immagine nello spazio oggetto, e ciò è dovuto alla particolare simmetria della lente convergente e all'azione della rifrazione del vetro della lente, che ha indice di rifrazione $n_2 > n_1$, e osserviamo appunto che nel calcolo del rapporto di ingrandimento la presenza del segno meno è introdotta appunto per evidenziare il capovolgimento delle immagini estese nello spazio immagine che attraversano una lente convergente.

Terminiamo una sezione con un'ultima considerazione riguardo l'equazione delle lenti e i suoi segni, e in base allo studio dei segni nel caso di una lente convergente ($f > 0$), supponendo di avere a che fare con un oggetto esteso reale, ossia con $s_1 > 0$, possiamo osservare che:

$$s'_2 = \frac{s_1 f}{s_1 - f}$$

E dunque da ciò si deduce tramite uno studio del segno che:

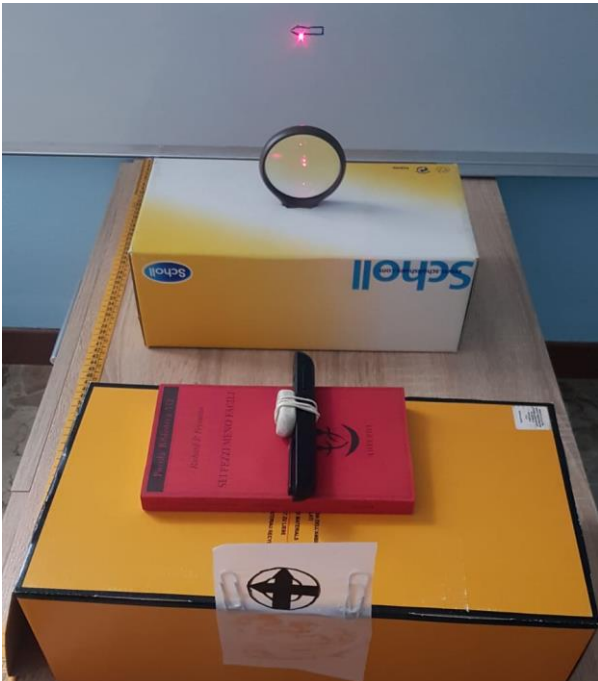
- L'immagine è *reale* (sta nel piano immagine) se $s'_2 > 0$, ossia se e solo se $s_1 > f$;
- L'immagine è *ingrandita* (la lente convergente funziona come una lente d'ingrandimento) se $s'_2 > s_1$, ossia se e solo se $s_1 < 2f$;

STRUMENTAZIONE:

Elenchiamo qui sotto brevemente la strumentazione utilizzata per l'esperimento:

- Una lente d'ingrandimento (diametro 7,2 cm Bassanoni / 7,5 cm Celada)
- Torcia dello smartphone
- Carta da lucido
- Pennarello nero indelebile
- Due scatole da scarpe
- Lavagna
- Matita / pennarelli
- Metro da sarta (sensibilità 0,5 cm)
- Righello (sensibilità 0,1 cm)
- Puntatore Laser ($\lambda = 650 \text{ nm}$)
- Specchio riflettente
- Cutter

PROCEDIMENTO:



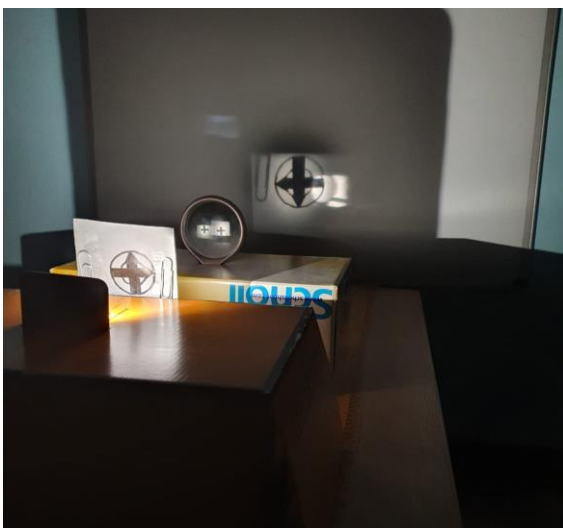
Determinazione asse ottico tramite puntatore laser - Bassanoni



Determinazione asse ottico tramite puntatore laser - Celada

Prima di descrivere i tre metodi di misura e di analisi dati utilizzati per il calcolo della lunghezza focale della nostra lente convergente, è necessario effettuare una considerazione iniziale, ossia la determinazione dell'asse ottico (e di conseguenza l'individuazione del centro di curvatura) della lente. Per prima cosa è stato necessario fissare ad un supporto semovibile la lente, che si sarebbe potuto muovere senza tuttavia alterare l'inclinazione della lente, e per fare questo è stato forato il lato di una scatola da scarpe con un cutter dando al buco la forma del manico, di modo che potesse incastrarsi bene all'interno lasciando fuori il vetro. Fissata la lente, il suo asse ottico è stato posto ortogonale ad una parete, su cui è stata appesa parallelamente una lavagna bianca, e ortogonalmente al piano della lavagna è stato disposto il metro da sarta per la misurazione della distanza lente-schermo. A questo punto, per determinare l'asse ottico è stato utilizzato il puntatore laser: lo si punta verso lo schermo, e tramite uno specchio si controlla che il fascio sia ortogonale alla sua superficie - si vede per riflessione, quando si osserva che il raggio laser ritorna riflesso nella sorgente stessa - , lo si fissa tramite un supporto (un'altra scatola da scarpe nel nostro caso), e si controlla se, inserendo la lente lungo il fascio di luce, il fascio laser sullo schermo non viene deviato rispetto alla posizione iniziale. Se

il fascio sullo schermo non viene deviato rispetto a prima, allora è stato individuato il centro della lente, e per individuare ora l'asse ottico passante per il centro della lente, si sfrutta nuovamente il fenomeno della riflessione. Ruotando piano la lente attorno al suo centro, cerchiamo di far collimare il fascio riflesso del laser nel primo diottero che compone la lente direttamente nella sorgente del puntatore. Quando ciò avviene, il percorso del raggio laser ha determinato la posizione dell'asse ottico della lente (osservare anche allegato video). Ora, una volta determinato l'asse ottico, quello sarà il punto di riferimento fondamentale da cui far partire tutte le nostre altre misurazioni, e possiamo ora costruire il setup sperimentale necessario per il resto. Su un foglio di carta da lucido andremo a disegnare un'immagine estesa, che utilizzeremo come riferimento per le seguenti misure, colorandola (davanti e dietro) di nero, di modo che possa assorbire il più possibile la luce bianca, e cercheremo di fissare questa immagine estesa con l'ausilio di colla e graffette sul bordo di un'altra scatola da scarpe (non quella della lente) di modo che sia parallela allo schermo della lavagna, e di nuovo sulla scatola verrà apportato un nuovo buco tramite il cutter, di modo da creare un'insenatura fissa in cui poter inserire lo smartphone, che andrà a fungere da torcia per illuminare la nostra immagine.



Setup sperimentale 1 - Bassanoni



Setup sperimentale 2 - Celada

A questo punto, dopo aver descritto il setup sperimentale di base, sarà possibile effettuare la misurazione della lunghezza focale, che avverrà tramite tre diversi metodi di misurazione e di analisi dei dati.

Metodo 1 – Regressione Lineare:

Questo metodo fa uso dell'equazione delle lenti, attraverso cui è possibile in maniera semplice una retta di regressione lineare, scrivendo la distanza oggetto, ossia la distanza immagine lente s_1 in funzione della distanza immagine, ossia della distanza schermo lente s_2 e della distanza focale f rispetto al centro della lente. Osserviamo in questo modo che è possibile costruire una retta di regressione lineare per il calcolo della lunghezza focale, ottenendo il reciproco della nostra grandezza sotto forma di intercetta:

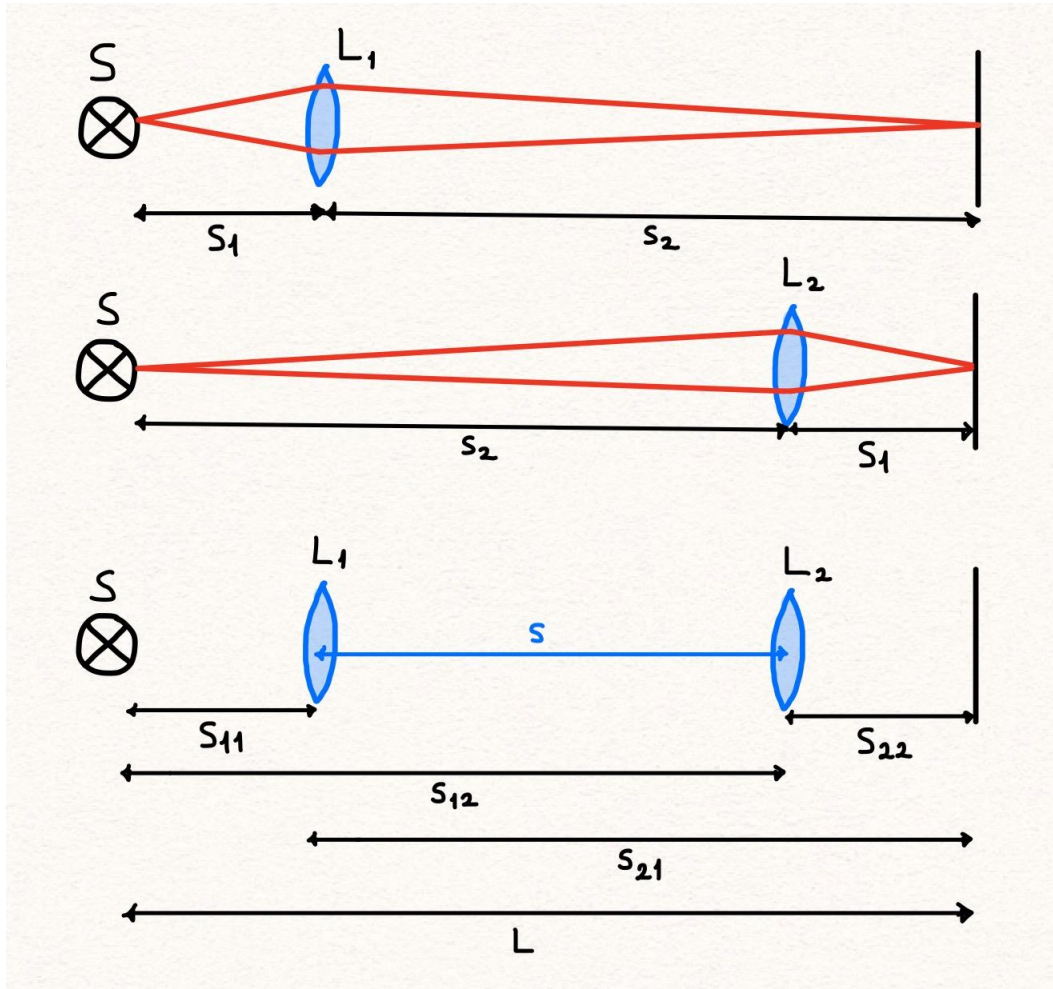
$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s'_2} = \frac{1}{f} \rightarrow \frac{1}{s_1} = -\frac{1}{s'_2} + \frac{1}{f} \rightarrow Y = -X + q$$

Notiamo un interessante particolare: il coefficiente angolare della retta di regressione è pari a meno uno, e ciò evidenzia un'importante simmetria tra le distanze s_1 e s'_2 , e ciò è evidente dall'osservazione dell'equazione delle lenti, da cui si può dedurre che l'equazione è simmetrica rispetto alla posizione dei punti coniugati. Dunque per verificare il corretto svolgimento della regressione lineare sarà importante controllare anche il valore del coefficiente angolare. Per la misurazione, sono state prese rispettivamente nove coppie di misurazioni, variando la distanza s'_2 di 10 cm ad ogni misura, partendo da 20 cm ed arrivando fino a 100 cm. Per individuare la posizione s_1 della distanza immagine lente, si è osservata l'immagine capovolta proiettata sullo schermo, e spostando avanti ed indietro lungo la linea dell'asse ottico la sorgente su cui è

sorretta l'immagine si è cercata la posizione di messa a fuoco dell'immagine, ed una volta individuata è stata misurata la distanza oggetto-lente tramite il metro da sarta. Questa operazione sistematica sarà eseguita per ogni misurazione.

Per quanto riguarda infine il calcolo degli errori, sono stati assunti come errori sulla misurazione la sensibilità degli strumenti di misura (ossia il metro da sarta), e tramite il metodo dei minimi quadrati è stato ottenuto l'errore sulla lunghezza focale f delle due lenti.

Metodo 2 – Metodo di Bessel:



Rappresentazione schematica del metodo di Bessel

Il metodo di Bessel sfrutta come proprietà la simmetria dell'equazione delle lenti, ed utilizza il seguente approccio: fissata una distanza L tra sorgente luminosa e schermo (cioè tra oggetto e schermo nel nostro caso), si va a muovere la lente lungo l'asse ottico, fino a che non si individua una posizione in cui l'immagine proiettata sullo schermo viene messa a fuoco. A quel punto, misurando la distanza tra sorgente e lente si trova la distanza s_1 , e di conseguenza l'associata distanza $s_2 = L - s_1$. L'equazione delle lenti diventa a questo punto:

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{L - s_1} = \frac{1}{f}$$

Ora, manipolando l'equazione, si trova che la distanza focale f della lente è pari a:

$$f = \frac{s_1(L - s_1)}{L}$$

Riscrivendo ora l'equazione come un polinomio di secondo grado in funzione di s_1 , è possibile ricavare in maniera esatta due posizioni coniugate per la distanza oggetto lente s_1 , secondo la formula di risoluzione delle equazioni di secondo grado:

$$s_1^2 - Ls_1 + fL = 0 \Rightarrow s_1 = \frac{L \pm \sqrt{L^2 - 4fL}}{2}$$

Dallo studio del determinante si evince quindi che:

- per $L > 4f$ si hanno due soluzioni reali distinte, e dunque esistono due configurazioni spaziali simmetriche rispetto al centro dell'asse ottico per s_1 in cui si vede un'immagine a fuoco sullo schermo;
- per $L = 4f$ si hanno due soluzioni reali coincidenti, ossia una soluzione, e dunque esiste una sola configurazione spaziale esattamente nella posizione $s_1 = L/2$ in cui si vede un'immagine a fuoco sullo schermo;
- per $L < 4f$ si hanno due soluzioni immaginarie, e dunque non esiste alcuna configurazione spaziale in cui posso trovare un s_1 tale per cui io veda un'immagine a fuoco sullo schermo;

Ora, ponendosi nel caso in cui $L > 4f$, e supponendo di avere a disposizione due lenti convergenti uguali da disporre come mostrato in figura (nel nostro caso, avendo una sola lente, la sposteremo nelle due configurazioni rappresentate sopra), ed osservando le varie distanze, per la simmetria del sistema si può facilmente dedurre che $s_{11} = s_{22}$ e $s_{12} = s_{21}$, e quindi introducendo la variabile s , ossia la distanza tra le due lenti, possiamo riscrivere $s_{11} = \frac{L}{2} - \frac{s}{2}$ e $s_{12} = \frac{L}{2} + \frac{s}{2}$, e dunque arriviamo all'espressione della distanza focale espressa secondo Bessel, effettuando queste sostituzioni semplici nell'equazione delle lenti sottili:

$$f = \frac{L^2 - s^2}{4L}$$

Nel caso del nostro esperimento, andremo ad effettuare tramite il metodo di Bessel quattro misurazioni ponendoci in quattro diverse distanze L fisse, e per ognuna di queste andremo a misurare le distanze s_{11} e s_{22} spostando la posizione della lente lungo la linea dell'asse ottico fino ad ottenere le due posizioni di messa a fuoco, e facendo la sottrazione $L - s_{11} - s_{22}$ otterremo il valore di s da utilizzare nella formula della distanza focale. Verranno osservate inoltre in maniera qualitativa le proprietà dell'equazione di secondo grado in funzione di s_1 , verificando se sono consistenti nel nostro modello le disuguaglianze tra L e $4f$, e in particolare sarà evidenziato dal nostro ultimo metodo la condizione $L = 4f$.

I quattro valori sulla distanza focale che otterremo saranno mediati, e le incertezze sulle singole misure saranno assegnati in base all'incertezza dello strumento di misurazione (sempre il metro da sarta), e gli errori delle grandezze derivate saranno calcolati attraverso la semplice propagazione degli errori.

Metodo 3 – Funzione Rapporto d'Ingrandimento:

Per questo ultimo metodo sono state utilizzate le immagini proiettate sullo schermo della lavagna dalla lente nelle condizioni di messa a fuoco, e per la misura della distanza focale sono state utilizzate le misure delle altezze laterali h_2 delle immagini, ponendo come altezza laterale fissa h_1 quella del nostro oggetto. La relazione utilizzata nel calcolo è quella che abbiamo ricavato nella teoria delle lenti sottili:

$$m = \frac{1}{1 - \frac{s_1}{f}}$$

A questo punto, ricordando la definizione del rapporto d'ingrandimento m e tenendo conto del suo segno è possibile riscrivere così la funzione:

$$h_2 = -\frac{h_1}{1 - \frac{1}{f}s_1} \quad \leftrightarrow \quad f(x) = -\frac{A}{1 - BX}$$

In questo contesto, osserviamo che l'altezza h_2 dell'immagine sullo schermo è una funzione della distanza oggetto-lente s_1 , e dunque $h_2 = h_2(s_1)$. Il segno meno che compare nella funzione non è strano, è anzi riprova della proprietà di capovolgimento delle immagini dovuto all'azione delle lenti convergenti. Infatti si osserveranno per l'appunto sullo schermo delle immagini capovolte rispetto al nostro oggetto iniziale.



Oggetto 1 - Bassanoni



Oggetto 2 - Celada



Immagine 1 - Bassanoni



Immagine 2 - Celada

Prendendo come riferimento fisso una delle due frecce rettilinee del disegno, si è fissato dall'oggetto l'altezza h_1 misurando la lunghezza di una freccia dalla punta fino alla coda con un righello, dopodiché, scelte cinque configurazioni a diversa distanza L tra schermo e oggetto, sono state misurate sullo schermo le altezze h_2 delle immagini nella condizione di messa a fuoco per un dato s_1 , prendendo come riferimento la medesima freccia proiettata, misurando come prima la sua lunghezza dalla punta alla coda con un righello. In questo modo non si tiene conto del segno dell'altezza h_2 , e questo è stato fatto siccome non è possibile stabilire con precisione che il centro dell'immagine stia sull'asse ottico, ma la funzione $h_2(s_1)$ contiene già al suo interno il segno, quindi abbiamo potuto misurare con tranquillità le altezze h_2 considerandone direttamente il valore assoluto. Una volta ottenuto il set di dati necessario e stabiliti gli errori sulle misure basandoci sull'incertezza degli strumenti (metro da sarta per s_1 e righello per h_2 e h_1), attraverso il programma di analisi dati Origin è stata costruita la funzione ingrandimento ponendo come costante $A = h_1$ e come parametro libero $B = \frac{1}{f}$, che è ciò che ci interessa. A questo punto, una volta ottenuto il parametro B e la sua incertezza, si è ricavata la distanza focale f e il suo relativo errore (tramite la propagazione degli errori).

CALCOLI:

Metodo 1 – Bassanoni: Regressione Lineare

Dati:

Diametro lente: $d = (7,2 \pm 0,1)cm$

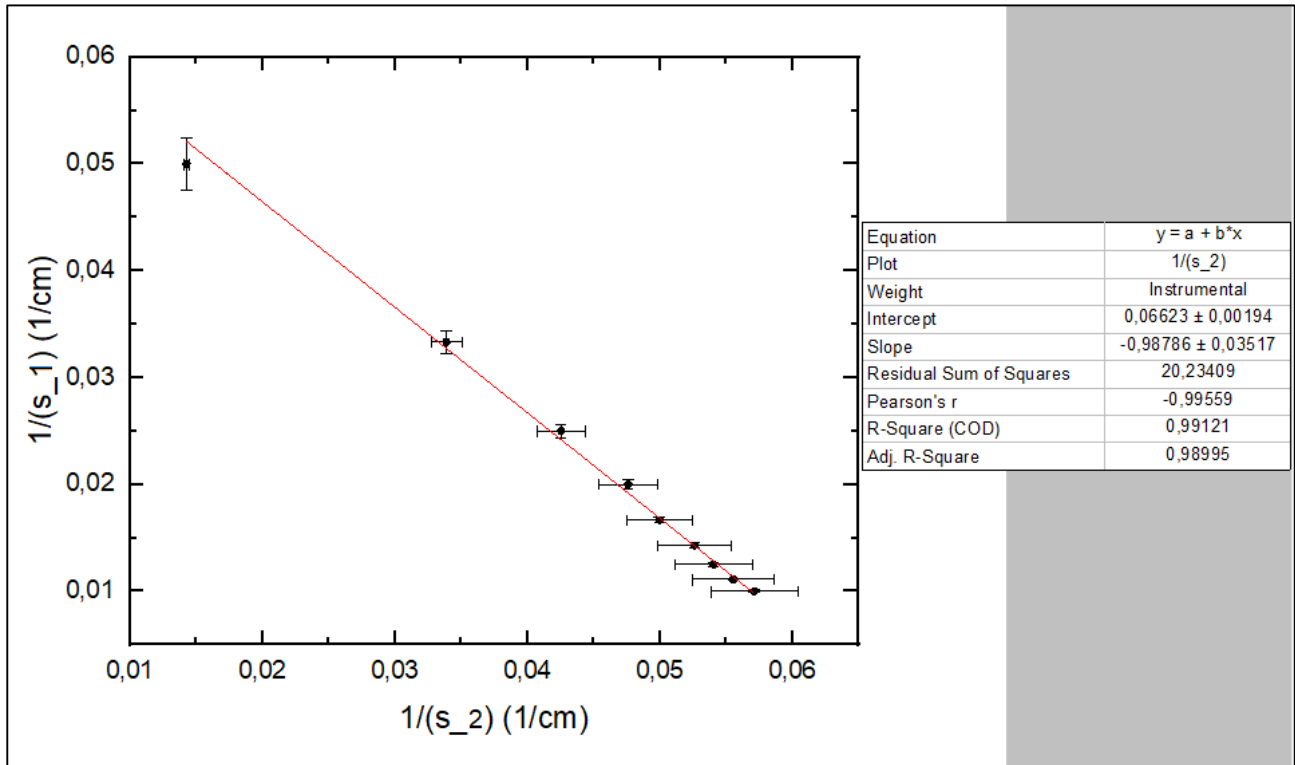
s_1 (cm)	Errore s_1 (cm)	s'_2 (cm)	Errore s'_2 (cm)
70,0	$\pm 0,5$	20	$\pm 0,5$
29,5	$\pm 0,5$	30	$\pm 0,5$
23,5	$\pm 0,5$	40	$\pm 0,5$
21,0	$\pm 0,5$	50	$\pm 0,5$
20,0	$\pm 0,5$	60	$\pm 0,5$
19,0	$\pm 0,5$	70	$\pm 0,5$
18,5	$\pm 0,5$	80	$\pm 0,5$
18,0	$\pm 0,5$	90	$\pm 0,5$
17,5	$\pm 0,5$	100	$\pm 0,5$

$$\delta\left(\frac{1}{s}\right) = \left|\frac{1}{s}\right| \cdot \left(\frac{\delta s}{|s|}\right)$$

$1/s_1$ (cm^{-1})	Errore $1/s_1$ (cm^{-1})	$1/s'_2$ (cm^{-1})	Errore $1/s'_2$ (cm^{-1})
0,0143	$\pm 0,0001$	0,0500	$\pm 0,0010$
0,0340	$\pm 0,0005$	0,0330	$\pm 0,0005$
0,0425	$\pm 0,0010$	0,0250	$\pm 0,0003$
0,0475	$\pm 0,0010$	0,0200	$\pm 0,0003$
0,0500	$\pm 0,0010$	0,0167	$\pm 0,0002$
0,0525	$\pm 0,0015$	0,0143	$\pm 0,0001$
0,0540	$\pm 0,0015$	0,0125	$\pm 0,0001$
0,0555	$\pm 0,0015$	0,0111	$\pm 0,0001$
0,0570	$\pm 0,0015$	0,0100	$\pm 0,0001$

Regressione:

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s'_2} = \frac{1}{f} \rightarrow \frac{1}{s_1} = -\frac{1}{s'_2} + \frac{1}{f} \rightarrow Y = -X + q$$



$$q = \frac{1}{f} \rightarrow f = \frac{1}{q} = (15,1 \pm 0,4)cm$$

$$m = -0,988 \pm 0,035 \cong -1 \text{ come atteso}$$

Metodo 1 –Celada: Regressione Lineare

Dati:

Diametro lente: $d = (7,5 \pm 0,1)cm$

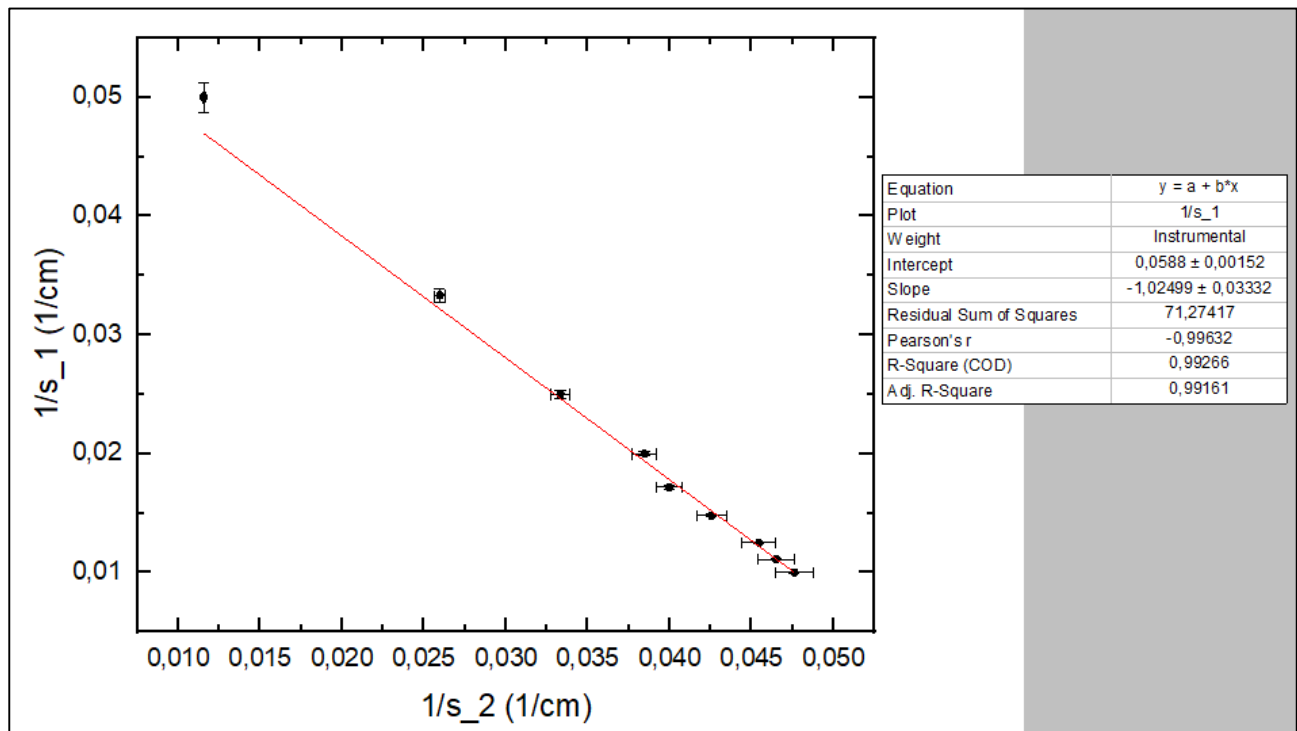
s_1 (cm)	Errore s_1 (cm)	s'_2 (cm)	Errore s'_2 (cm)
86,5	±0,5	20,0	±0,5
38,5	±0,5	30,0	±0,5
30,0	±0,5	40,0	±0,5
26,0	±0,5	50,0	±0,5
25,0	±0,5	60,0	±0,5
23,5	±0,5	70,0	±0,5
22,0	±0,5	80,0	±0,5
21,5	±0,5	90,0	±0,5
21,0	±0,5	100,0	±0,5

$$\delta\left(\frac{1}{s}\right) = \left|\frac{1}{s}\right| \cdot \left(\frac{\delta s}{|s|}\right)$$

$1/s_1 (cm^{-1})$	Errore $1/s_1 (cm^{-1})$	$1/s'_2 (cm^{-1})$	Errore $1/s'_2 (cm^{-1})$
0,0115	$\pm 0,0001$	0,0500	$\pm 0,0015$
0,0259	$\pm 0,0004$	0,0330	$\pm 0,0006$
0,0330	$\pm 0,0005$	0,0250	$\pm 0,0004$
0,0385	$\pm 0,0008$	0,0200	$\pm 0,0003$
0,0400	$\pm 0,0008$	0,0167	$\pm 0,0002$
0,0425	$\pm 0,0010$	0,0143	$\pm 0,0001$
0,0450	$\pm 0,0010$	0,0125	$\pm 0,0001$
0,0465	$\pm 0,0010$	0,0111	$\pm 0,0001$
0,0475	$\pm 0,0010$	0,0100	$\pm 0,0001$

Regressione:

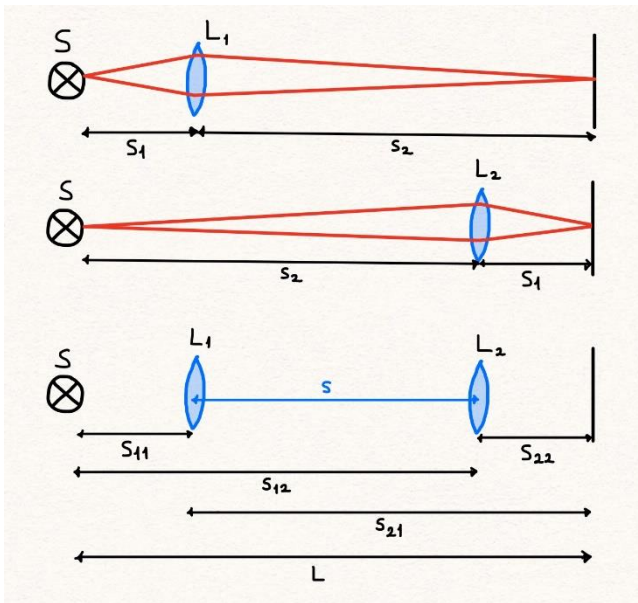
$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f} \rightarrow \frac{1}{s_1} = -\frac{1}{s_2} + \frac{1}{f} \rightarrow Y = -X + q$$



$$q = \frac{1}{f} \rightarrow f = \frac{1}{q} = (17,0 \pm 0,5) \text{ cm}$$

$$m = -1,02 \pm 0,03 \cong -1 \text{ come atteso}$$

Metodo 2 – Bassanoni: Metodo di Bessel



Notazione:

$$s_{11} = s_{22} = s_1$$

$$s_{12} = s_{21} = s_2$$

$$s = s_2 - s_1$$

Dati:

L (cm)	Errore L (cm)	s_2 (cm)	Errore s_2 (cm)	s_1 (cm)	Errore s_1 (cm)
80	$\pm 0,5$	60,0	$\pm 0,5$	20,0	$\pm 0,5$
90	$\pm 0,5$	71,0	$\pm 0,5$	19,0	$\pm 0,5$
100	$\pm 0,5$	81,5	$\pm 0,5$	18,5	$\pm 0,5$
110	$\pm 0,5$	92,0	$\pm 0,5$	18,0	$\pm 0,5$

L (cm)	Errore L (cm)	$s = s_2 - s_1$ (cm)	Errore s (cm)
80	$\pm 0,5$	40	± 1
90	$\pm 0,5$	52	± 1
100	$\pm 0,5$	63	± 1
110	$\pm 0,5$	74	± 1

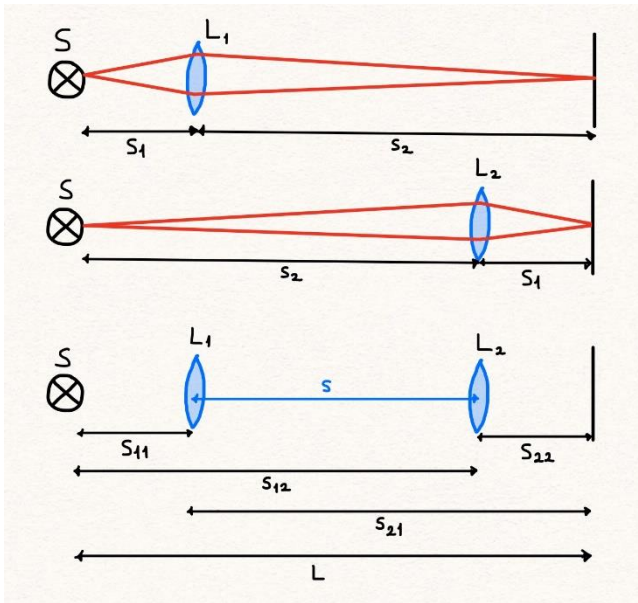
$$f = \frac{L^2 - s^2}{4L} \quad \delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial L} \right|_{L_0, s_0} \cdot \delta L + \left| \frac{\partial f}{\partial s} \right|_{L_0, s_0} \cdot \delta s = \left(\frac{L^2 + s^2}{4L^2} \right) \delta L + \left(\frac{s}{2L} \right) \delta s$$

L (cm)	f (cm)	Errore f (cm)
80	15,0	$\pm 0,40$
90	15,0	$\pm 0,45$
100	15,0	$\pm 0,50$
110	15,0	$\pm 0,50$

Valore medio di f ottenuto:

$$f_{\text{medio}} = (15,00 \pm 0,45) \text{ cm}$$

Metodo 2 – Celada: Metodo di Bessel



Notazione:

$$s_{11} = s_{22} = s_1$$

$$s_{12} = s_{21} = s'_2$$

$$s = s'_2 - s_1$$

Dati:

L (cm)	Errore L (cm)	s'_2 (cm)	Errore s'_2 (cm)	s_1 (cm)	Errore s_1 (cm)
80	$\pm 0,5$	54,5	$\pm 0,5$	25,5	$\pm 0,5$
90	$\pm 0,5$	66,5	$\pm 0,5$	23,5	$\pm 0,5$
100	$\pm 0,5$	77,5	$\pm 0,5$	22,5	$\pm 0,5$
110	$\pm 0,5$	88,5	$\pm 0,5$	21,5	$\pm 0,5$

L (cm)	Errore L (cm)	$s = s'_2 - s_1$ (cm)	Errore s (cm)
80	$\pm 0,5$	29	± 1
90	$\pm 0,5$	43	± 1
100	$\pm 0,5$	55	± 1
110	$\pm 0,5$	67	± 1

$$f = \frac{L^2 - s^2}{4L} \quad f = \frac{L^2 - s^2}{4L} \quad \delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial L} \right|_{L_0, s_0} \cdot \delta L + \left| \frac{\partial f}{\partial s} \right|_{L_0, s_0} \cdot \delta s = \left(\frac{L^2 + s^2}{4L^2} \right) \delta L + \left(\frac{s}{2L} \right) \delta s$$

L (cm)	f (cm)	Errore f (cm)
80	17,3	$\pm 0,4$
90	17,3	$\pm 0,5$
100	17,3	$\pm 0,5$
110	17,2	$\pm 0,6$

Valore medio di f ottenuto:

$$f_{medio} = (17,3 \pm 0,5) \text{ cm}$$

Metodo 3 – Bassanoni: Utilizzando l'ingrandimento

$$m = \frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{1 - \frac{s_1}{f}}$$

Dati:

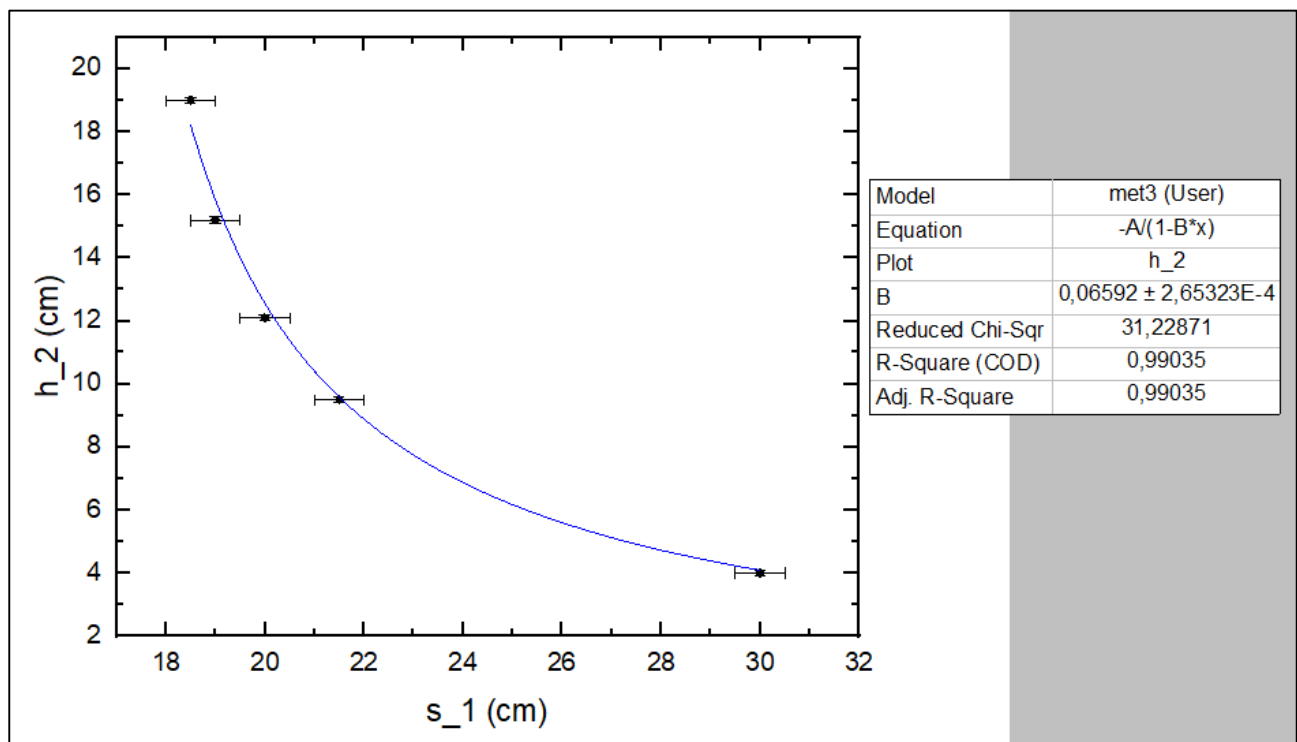
$$h_1 = (4,0 \pm 0,1)cm$$

s_1 (cm)	Errore s_1 (cm)	h_2 (cm)	Errore h_2 (cm)
30,5	$\pm 0,5$	4,0	$\pm 0,1$
21,5	$\pm 0,5$	9,5	$\pm 0,1$
20,5	$\pm 0,5$	12,1	$\pm 0,1$
19,5	$\pm 0,5$	15,2	$\pm 0,1$
18,5	$\pm 0,5$	19,0	$\pm 0,1$

Condizione $L = 4f$

Fit:

$$\frac{h_2}{h_1} = -\frac{1}{1 - \frac{s_1}{f}} \rightarrow h_2 = -\frac{h_1}{1 - \frac{s_1}{f}} \rightarrow Y = -\frac{A}{1 - BX} \text{ dove } Y = h_2; X = s_1; A = h_1; B = \frac{1}{f}$$



$$B = \frac{1}{f} \rightarrow f = \frac{1}{B} = (15,17 \pm 0,06)cm$$

Metodo 3 – Celada: Utilizzando l'ingrandimento

$$m = \frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{1 - \frac{s_1}{f}}$$

Dati:

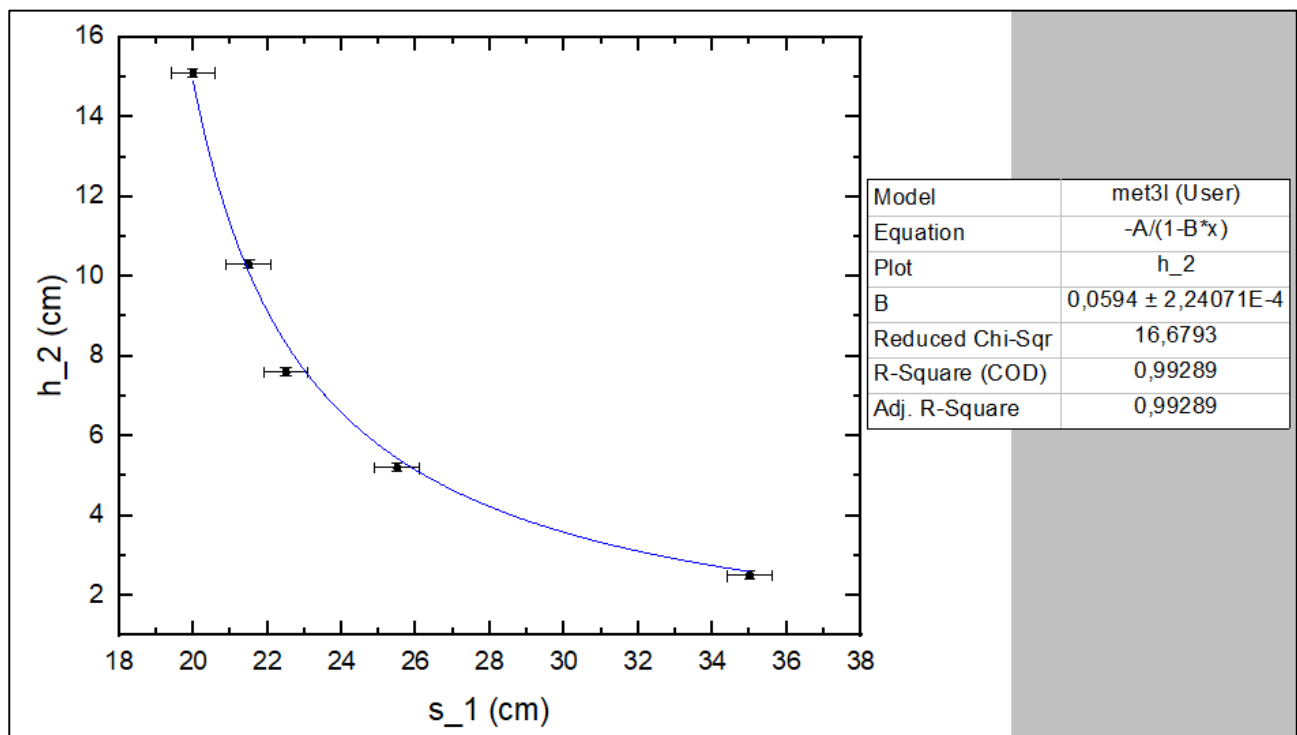
$$h_1 = (2,5 \pm 0,1) \text{ cm}$$

s_1 (cm)	Errore s_1 (cm)	h_2 (cm)	Errore h_2 (cm)
35,0	$\pm 0,5$	2,5	$\pm 0,1$
25,5	$\pm 0,5$	5,2	$\pm 0,1$
22,5	$\pm 0,5$	7,6	$\pm 0,1$
21,5	$\pm 0,5$	10,3	$\pm 0,1$
20,0	$\pm 0,5$	15,1	$\pm 0,1$

Condizione $L = 4f$

Fit:

$$\frac{h_2}{h_1} = -\frac{1}{1 - \frac{s_1}{f}} \rightarrow h_2 = -\frac{h_1}{1 - \frac{s_1}{f}} \rightarrow Y = -\frac{A}{1 - BX} \quad \text{dove } Y = h_2; X = s_1; A = h_1; B = \frac{1}{f}$$



$$B = \frac{1}{f} \rightarrow f = \frac{1}{B} = (16,83 \pm 0,07) \text{ cm}$$

Valore medio di f ottenuto: Bassanoni

Chiameremo rispettivamente i tre valori della distanza focale ottenuti f_1 , f_2 e f_3

$$|f_{medio}| = \frac{\sum_{i=1}^3 \left(f_i \cdot \frac{1}{\sigma_i^2} \right)}{\sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{\sigma_i^2} \right)} = 15,17 \text{ cm}$$

$$\sigma_{f_{medio}} = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{\sigma_i^2} \right)}} = 0,06 \text{ cm}$$

$$f_{medio} = (15,17 \pm 0,06) \text{ cm}$$

Valore medio di f ottenuto: Celada

Chiameremo rispettivamente i tre valori della distanza focale ottenuti f_1 , f_2 e f_3

$$|f_{medio}| = \frac{\sum_{i=1}^3 \left(f_i \cdot \frac{1}{\sigma_i^2} \right)}{\sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{\sigma_i^2} \right)} = 16,84 \text{ cm}$$

$$\sigma_{f_{medio}} = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{\sigma_i^2} \right)}} = 0,07 \text{ cm}$$

$$f_{medio} = (16,84 \pm 0,07) \text{ cm}$$

CONCLUSIONI:

Tramite la media pesata, che tiene conto dei valori delle lunghezze focali dei tre metodi e dei loro relativi errori, si ottengono i seguenti risultati:

$$f_{\text{medio-Bassanoni}} = (15,17 \pm 0,06) \text{cm}$$

$$f_{\text{medio-Celada}} = (16,84 \pm 0,07) \text{cm}$$

Non avendo a disposizione un valore teorico da confrontare, non è possibile stabilire con esattezza se questi sono i valori reali delle lunghezze focali delle due lenti convergenti, tuttavia sono valori verosimili con la teoria delle lenti sottili, ed è quindi accettabile l'approssimazione di fondo dei raggi parassiali e della distanza $d \rightarrow 0$ nel nostro modello. Inoltre si osservi che per $L = 4f$ nella nostra misurazione delle altezze h_2 tramite il terzo metodo (evidenziate nello sfondo azzurro) si osserva che $s_1 = L/2$ e che $h_2 = h_1$ (nella dovuta banda di incertezza), così come descritto dalla simmetria dell'equazione delle lenti in quel caso particolare. Ciò è un'ulteriore verifica che va a corroborare la verosimiglianza dei nostri risultati.

E' necessario tuttavia fare alcune considerazioni riguardo gli errori: l'errore finale ricavato dalla media risulta essere molto piccolo rispetto a quello ottenuto con i primi due metodi, e ciò è dovuto chiaramente all'influenza dell'errore del terzo metodo nella media. E' abbastanza coerente pensare che l'errore sulla misura finale risulti sottostimato, e che quindi il terzo metodo di misurazione, per quanto risulti preciso e comunque consistente nelle bande d'incertezza con la misura di f con gli altri due, non tiene conto nella sua struttura di alcune importanti sorgenti d'errore, dunque risultano certamente più affidabili le misure condotte col metodo della regressione lineare e col metodo di Bessel.

Discutiamo ora delle possibili fonti d'errore che possono aver inficiato la precisione delle nostre misure:

Errori Casuali:

- Una non corretta inclinazione dell'asse ottico durante gli spostamenti della posizione della lente lungo il sistema di misurazione;
- Un disallineamento lungo l'asse ottico dell'immagine, che può aver causato all'immagine proiettata sullo schermo delle piccole distorsioni ottiche che hanno inficiato nella misura dell'altezza h_2 ;
- La luminosità dell'ambiente esterno, che può aver reso all'occhio alcune difficoltà nell'individuazione della messa a fuoco;

Errori Sistemati:

- La scarsa precisione degli strumenti di misurazione utilizzati;
- Gli effetti diffusivi della luce bianca della sorgente luminosa, che possono aver distorto in parte la qualità dell'immagine proiettata sullo schermo;