

Bobine di Helmholtz

Alberto Rovelli, Andreas Popa

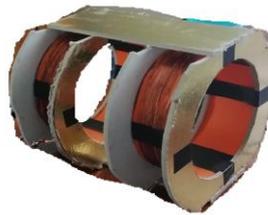


Fig. 1

Stima dei parametri dei principali componenti circuitali

Resistenza dell'amperometro

All'inizio dell'esperienza ci siamo sincerati che l'amperometro (*Avidsen 107100 Multimeter Digital*) avesse effettivamente una resistenza interna di 50Ω , come riportato dal manuale dell'apparecchio, così da introdurre anche un errore su questa quantità, in alternativa da considerarsi nota con incertezza trascurabile. Abbiamo trattato il multimetro (in configurazione di amperometro) come una resistenza all'interno di un circuito e calcolato la resistenza dal rapporto fra caduta di tensione ai suoi capi (misurata con un secondo multimetro in configurazione di voltmetro) e corrente letta:

$$R_{amp} = \frac{(0,811 \pm 0,001)\text{V}}{(1,62 \pm 0,01) \times 10^{-2}\text{A}} = (50,06 \pm 0,37)\Omega$$

Per verificare che effettivamente il valore fosse affidabile abbiamo posto in serie una resistenza R da $18\text{ k}\Omega$ (come test di riproducibilità usando una corrente diversa e la più piccola resistenza R a noi disponibile); ci siamo però accorti che con una simile resistenza la corrente in circolo nel circuito era un valore molto difficile da misurare precisamente con lo strumento che avevamo a disposizione, teniamo dunque come dato affidabile quello di cui sopra.

Resistenza interna della batteria

Abbiamo cercato di determinare la resistenza interna della batteria, considerandola come una resistenza nel seguente circuito:

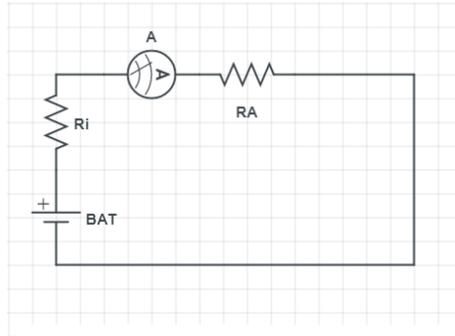


Fig. 2)

in modo da poter avere successivamente una stima più precisa delle resistenze delle bobine.

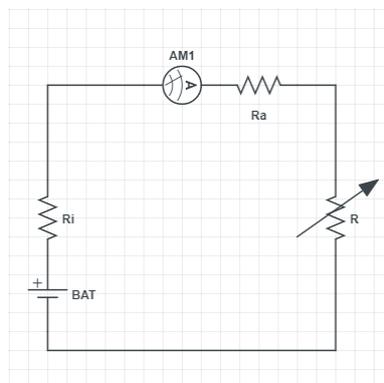


Fig. 3)

Fissiamo la tensione e leggiamo la corrente nel circuito di Figura 3 per diverse resistenze esterne.

La relazione presa in considerazione per la regressione è:

$$R_k = \varepsilon \frac{1}{I_k} - r$$

In questa relazione R_k è la resistenza esterna nota inserita nel circuito (vedi Figura 3), r è la somma della resistenza interna di batteria ed amperometro.

Otteniamo come risultato:

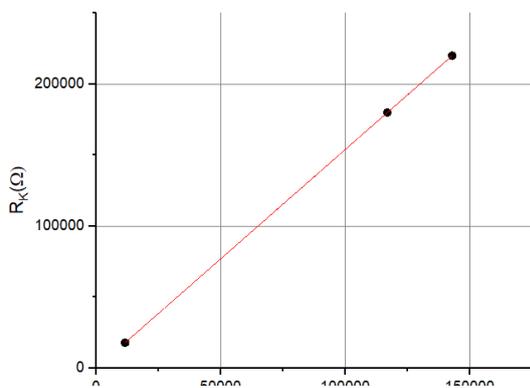


Fig. 4A)

Equation	$y = a + b \cdot x$
Plot	Rk
Weight	No Weighting
Intercept	$-56,7997 \pm 11,12598$
Slope	$1,53991 \pm 1,04158E-4$
Residual Sum of Squares	104,68898
Pearson's r	1
R-Square (COD)	1
Adj. R-Square	1

Fig. 4B)

Il voltaggio utilizzato è di 1,5V

Ed anche:

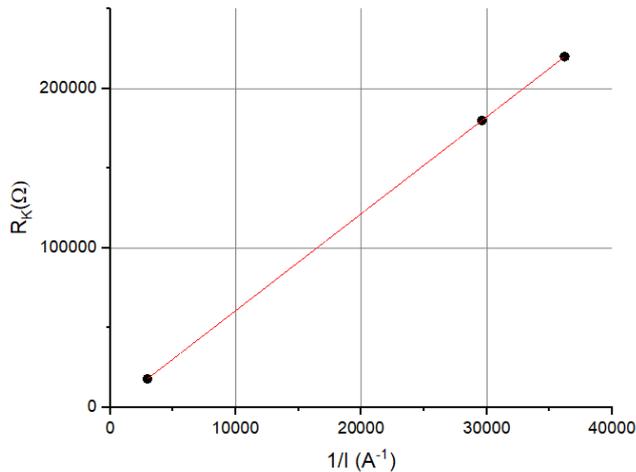


Fig. 5A)

Equation	$y = a + b \cdot x$
Plot	Rk
Weight	No Weighting
Intercept	$-59,5171 \pm 2,1517$
Slope	$6,07984 \pm 7,95317$
Residual Sum of Squ	3,91565
Pearson's r	1
R-Square (COD)	1
Adj. R-Square	1

Fig. 5B)

Il voltaggio utilizzato è 6,1V

Come si può osservare dalla formula adoperata per la regressione, l'intercetta rappresenta l'opposto della somma di resistenza della batteria ed amperometro, cioè $-r$. Per ottenere la resistenza della batteria ad r va sottratto il valore di 50Ω dovuta ad R_{amp} . Ricaviamo così due valori di resistenza:

1. $(6,8 \pm 1,3) \Omega$ per il valore di 1,5V
2. $(9,5 \pm 1,8) \Omega$ per il valore di 6,1V

Otteniamo un valore medio di: $\langle R \rangle = (8,15 \pm 1,55) \Omega$ (il manuale del produttore riporta che la resistenza interna deve essere compresa tra 6-15 Ω).

Resistenza degli avvolgimenti

Abbiamo in seguito collegato gli avvolgimenti in serie e abbiamo effettuato una prima stima della resistenza, collegandoli al multimetro in modalità ohmetro, il quale ha rilevato una resistenza totale di $(19,4 \pm 0,1) \Omega$. Possiamo quindi ragionevolmente stimare una resistenza di $(9,7 \pm 0,2) \Omega$ per ogni bobina.

La serie dei due avvolgimenti è stata successivamente connessa alla batteria che stava erogando una d.d.p di $(0,81 \pm 0,01) V$ e abbiamo così misurato una corrente di $(11 \pm 1) mA$; tutto questo ci porta a stimare una resistenza totale di:

$$R_{tot} = \frac{V}{I} = \frac{0,81 \pm 0,1 V}{0,011 \pm 0,001 A} = (73,6 \pm 7) \Omega$$

A questa quantità sottraiamo i 50Ω di resistenza del multimetro e la resistenza interna della

batteria, otteniamo così:

$$2R_a = (76.3 \pm 7) - 50 - (8,39 \pm 0,58) = (15.2 \pm 7,58)\Omega$$

Le due misure risultano sovrapponibili e, nonostante l'errore sulla seconda sia molto grande, la riteniamo più affidabile della prima, in quanto il multimetro in questione aveva la possibilità di effettuare la misura a un fondo scala molto superiore rispetto al valore considerato, il che può avere notevolmente influito sulla misura. Giungiamo alla conclusione che ogni avvolgimento ha dunque una resistenza di $(7,6 \pm 3,8)\Omega$.

In aggiunta a queste due misure è stata realizzata una regressione lineare, la cui equazione è la stessa utilizzata per le resistenze di cui sopra, ottenendo così il seguente risultato:

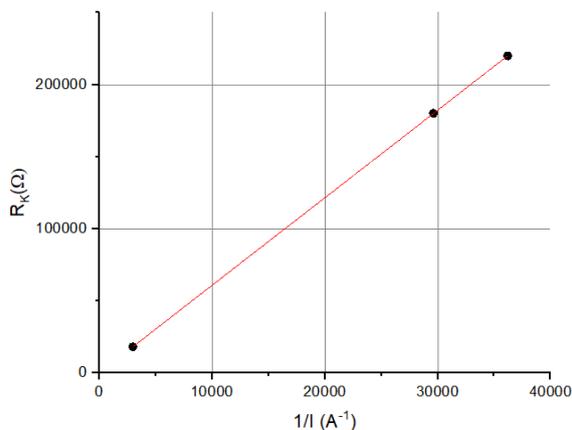


Fig. 6A

Equation	$y = a + b \cdot x$
Plot	Rk
Weight	No Weighting
Intercept	$-74,49106 \pm 1,945$
Slope	$6,07981 \pm 7,19173$
Residual Sum of Squ	3,2018
Pearson's r	1
R-Square (COD)	1
Adj. R-Square	1

Fig. 6B

Il voltaggio applicato è di 6,08 V

Come si evince dall'intercetta di questa regressione, otteniamo sicuramente un errore minore rispetto a quello della misura precedente. Da questa ricaviamo dunque la resistenza di un singolo avvolgimento:

$$2R = (74,5 \pm 1,9) - (50,06 \pm 0,37) - (9,5 \pm 1,8) = (14,94 \pm 4,07)\Omega$$

da cui:

$$R = (7,47 \pm 2,03)\Omega$$

Infine abbiamo inserito le bobine una per volta nel circuito formato dalle bobine stesse, l'amperometro e la resistenza da $18\text{ k}\Omega$ con $V_o = 1,54\text{ V}$ e ne è stata misurata la corrente che vi scorreva ($I = 8,5255 \times 10^{-5}$) A. Abbiamo così ottenuto:

$$R_{a1} = (6,6 \pm 1,5)\Omega$$

Nel secondo caso abbiamo mantenuto lo stesso valore di d.d.p e abbiamo misurato una corrente di ($I = 8,4253 \times 10^{-5}$) A ricavando come prima un valore di:

$$R_{a2} = (9,2 \pm 1,6)\Omega$$

Notiamo da subito che gli avvolgimenti non hanno la stessa precisa resistenza. Questo era prevedibile dato che sono state costruite con modalità che non permettevano di avere una sufficiente precisione da renderle "uguali" in buona approssimazione. Quando messe in configurazione di *Helmholtz*, quindi, non produrranno lo stesso identico contributo.

Ci accorgiamo però che le misure si sovrappongono all'interno dell'intervallo di errore; sembra dunque sensato prendere come resistenza le misure trovate tramite le regressioni. La media, infatti, dei valori R_{a1} e R_{a2} è $(7,9 \pm 1,5) \Omega$ che si sovrappone alle misure trovate in precedenza per un singolo avvolgimento; la somma analogamente è $(15,8 \pm 3,1) \Omega$, che, come valore, si sovrappone alle misure della serie dei due avvolgimenti ottenuti prima. A questo punto precisiamo che nei calcoli che seguiranno utilizzeremo la misura con minor errore (quella della seconda regressione).

Stima del raggio medio e del raggio equivalente

Come naturale le nostre bobine non sono costituite da spire ideali, perciò si è reso necessario realizzare vari strati di filo, modificando di fatto lo spessore della bobina. Diventa dunque importante, ai fini del calcolo del campo magnetico generato, stimare un raggio medio supponendo la bobina di quella larghezza nell'ipotesi che le sue spire non siano ideali (il caso di spire ideali viene trattato nella stima del raggio equivalente).

Il raggio interno della bobina, misurato con un calibro, è dunque $r_i = (4,95 \pm 0,05) \text{ cm}$, mentre il raggio esterno $r_e = (5,05 \pm 0,05) \text{ cm}$, per il calcolo del raggio medio abbiamo utilizzato dunque la media aritmetica:

$$r_m = \frac{r_i + r_e}{2} = \frac{(4,95 \pm 0,05) + (5,05 \pm 0,05)}{2} = (5 \pm 0,05) \text{ cm}$$

Sperimentalmente abbiamo misurato che la nostra bobina produce al centro della spira un campo magnetico $(2,70 \pm 0,1) \text{ G}$, vediamo ora quale sarebbe il suo raggio (raggio equivalente) se la bobina fosse una singola spira in cui scorre una corrente di valore pari a quella che scorre nelle bobine moltiplicata per il numero degli avvolgimenti.

Innanzitutto siamo partiti considerando la corrente che circola nel circuito in cui si trova la nostra bobina e abbiamo stimato prima di tutto la resistenza di un singolo avvolgimento, ottenendo quindi:

$$I = \frac{V}{R_a} = \frac{1,00 \pm 0,01}{7,47 \pm 2,03} = (131 \pm 37) \text{ mA}$$

Nota: il potenziale vale ora 1V in quanto la batteria, sotto gli 1,5V di erogazione, fornisce un potenziale leggermente diverso ogni volta che la si utilizza.

Una volta a conoscenza della corrente che circola nel circuito possiamo stimare, avendo precedentemente misurato il campo magnetico prodotto dalla bobina nel suo centro, il raggio equivalente se la bobina si comportasse come una spira ideale:

$$r_{eq} = \frac{\mu_0 I n}{2B} = (0,07 \pm 0,02) \text{ m}$$

Essendo la discrepanza apprezzabile, riteniamo che questa assimilare ad una singola spira il nostro avvolgimento sia inadeguata. Va detto che ogni bobina ha in effetti un apprezzabile spessore sia in direzione radiale che in direzione assiale, non escludiamo però che anche la

misura di campo magnetico effettuata possa essere stata affetta da errore sistematico: al momento della misura non abbiamo ad esempio prestato attenzione alla presenza di disturbi ambientali. Nel seguito abbiamo tenuto presente a questo aspetto.

Campo magnetico teorico prodotto da una bobina

Avendo stimato ragionevolmente il raggio medio dell'avvolgimento, con una approssimazione equivalente a quella del precedente calcolo, procediamo alla stima del campo magnetico prodotto da una spira di raggio pari al raggio medio, avendo comunque (a questo seguirà un paragrafo apposito in cui valutiamo più accuratamente il campo interno ad una spira o ad una serie di spire)

$$B = \frac{\mu_0 I n}{2r_m} = 3,78 \pm 1.91 G$$

Una migliore valutazione del campo interno di una spira

Per il calcolo del campo magnetico generato da una spira è utile servirsi della prima formula di Laplace:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \vec{R}}{4\pi r^3}$$

Osserviamo che è sufficiente considerare solamente le componenti dirette lungo l'asse x, in quanto le altre componenti sono nulle per ragioni di simmetria. Otteniamo dunque:

$$dB_x = dB \cos\theta = \frac{\mu_0 I dl R}{4\pi r^3}$$

Integrando sulla variabile dl (cioè lungo il percorso della corrente lungo la spira) ricaviamo:

$$B_x = \frac{\mu_0 I R}{4\pi r^3} \int dl = \frac{\mu_0 I R^2}{2r^3}$$

Da questa formula può essere facilmente ricavato un grafico che mostra l'andamento del campo magnetico teorico in funzione della distanza dal centro. Riportiamo di seguito tale grafico:

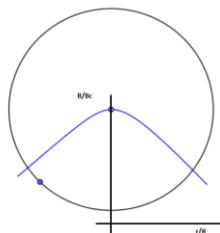


Fig. 7)

Campo prodotto da una spira in direzione assiale in funzione della posizione lungo il raggio.

Come si nota il campo è massimo al centro e non sono evidenziate particolari regioni di uniformità in quanto decade verso i lati in modo costante.

Campo interno di una coppia di bobine di Helmholtz

Consideriamo ora una coppia di bobine di Helmholtz e trattandole come una coppia di spire di uguale raggio, poste ad una distanza relativa pari al raggio stesso, ne calcoliamo il campo magnetico sull'asse delle bobine nel punto medio della loro distanza.

$$B_x = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\mu_0 i N}{R}$$

Riportiamo di seguito l'andamento del campo magnetico previsto teoricamente in direzione radiale a confronto con i dati misurati effettivamente della stessa grandezza

Si osserva una regione estesa di uniformità del campo: questo ci mostra il motivo per il quale si utilizza la configurazione di bobine in accoppiamento di Helmholtz.

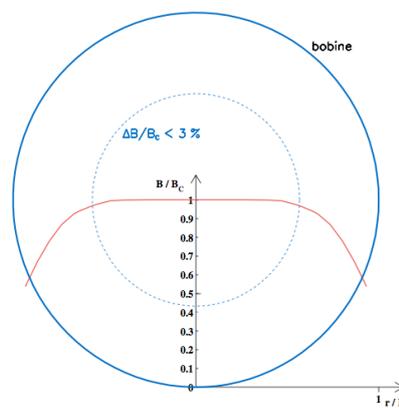


Fig. 8)

Andamento teorico del campo prodotto dalle bobine di Helmholtz in direzione assiale in funzione della posizione lungo il raggio.

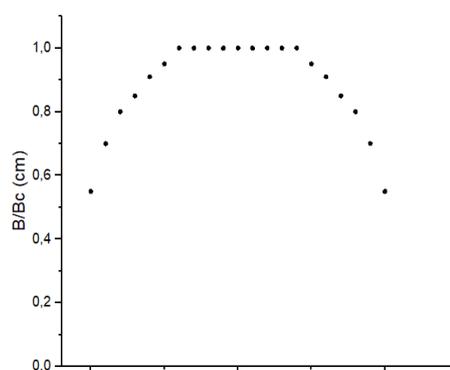


Fig. 9)

Grafico dell'andamento reale del campo in funzione della distanza dal centro (i dati in ascissa)

sono normalizzati al raggio medio)

Come si può notare, sebbene il grafico non ricalchi perfettamente l'andamento teorico, si crea una zona in cui possiamo dire che il campo è sufficientemente uniforme.

Breve analisi degli strumenti utilizzati

Sono stati utilizzati, per le misure, principalmente due strumenti:

- Gaussmetro analogico a zero centrale R.B. Assin;
- Software "Gauss Meter" prodotto da Kuewlsoft che sfrutta la tecnologia MEMS dei magnetometri per schede elettroniche.

Principi di funzionamento

-Gaussmetro a zero centrale:



Fig. 2)

Foto del quadrante del gaussmetro

Questo magnetometro, progettato principalmente per la rilevazione di residui o fondo magnetico nei materiali, sfrutta l'effetto Hall, come principio di funzionamento, ovvero l'instaurarsi di una differenza di potenziale su una placchetta di materiale conduttore sottoposto ad un campo magnetico e attraversato da corrente. Purtroppo il manuale non riporta specifiche molto esaustive: la scala è 10-0-10 e la sensibilità in questa scala viene indicata come di $\pm 0.1G$; la risposta dello strumento è di $0,5G$. E' collegabile ad una sonda per la rilevazione del campo magnetico.

-Magnetometro MEMS mag-akm 09918

Il magnetometro in questione viene sfruttato dal software di cui sopra; si riportano di seguito le caratteristiche dichiarate dal costruttore (AKM semiconductors) sul chip utilizzato:



Fig.11)

Foto del chipset

- **Axis:** X, Y, Z
- **Current - Supply (Max):** 4mA
- **Features:** Internal Magnet
- **Mounting Type:** Surface Mount
- **Operating Temperature:** -30°C ~ 85°C (TA)
- **Output Type:** I²C

- **Package / Case:** 4-UFBGA, WLCSP
- **Resolution:** 16 b
- **Sensing Range:** ±4.9mT
- **Supplier Device Package:** 4-WLCSP (0.76x0.76)
- **Technology:** Hall Effect
- **Voltage - Supply:** 1.65V ~ 1.95V

Fig. 3)

Specifiche del chipset direttamente come dichiarate dal costruttore per comodità di lettura

Il rilevatore in questione è un circuito integrato che funziona da bussola elettronica, contenente 3 sensori ad alta precisione X, Y, Z che sfruttano l'effetto Hall; il chip contiene anche un circuito di controllo del sensore, una catena di amplificazione segnale e un circuito aritmetico per processare il segnale di ciascun sensore.

In conclusione di questa breve parte di strumentazione, precisiamo che ogni misura diretta e/o verifica di valori di campo magnetico è stata effettuata con entrambi gli strumenti, e le misure dei due coincidono ragionevolmente se non diversamente segnalato. Inoltre, quali valori ufficiali, causa il più semplice posizionamento e la miglior affidabilità, abbiamo preferito le misure del gaussmetro in quanto dotato di certificato di precisione.

Misure di campo magnetico

Misura del coefficiente di proporzionalità tra l'intensità di corrente e il campo magnetico di due bobine in configurazione di Helmholtz

Come penultima misura abbiamo determinato il coefficiente di proporzionalità che lega il campo B_z (assiale) nel punto C (posto a metà della distanza fra le bobine) alla corrente che scorre nelle due bobine (poste in serie) in configurazione di Helmholtz; la relazione che lega le due quantità è la seguente (trattando ogni avvolgimento come sovrapposizione di N spire di uguale raggio):

$$B_z(C) = \frac{8\mu_0 N I}{5\sqrt{5}R}$$

Da tale relazione si estrapola la seguente regressione lineare che ci ha permesso di ricavare il valore del coefficiente cercato. Tale valore è riportato subito dopo i grafici.

La relazione teorica diventa:

$$B_z(C) = 8,992 \times 10^{-7} \frac{IN}{R}$$

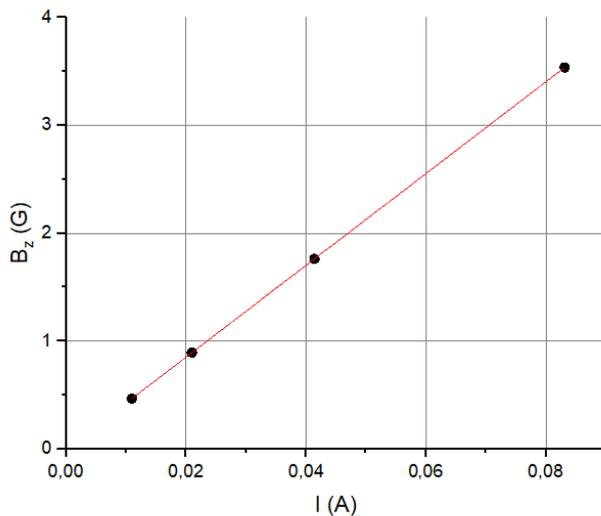


Fig. 4A)

Equation	$y = a + b \cdot x$
Plot	Bz
Weight	No Weighting
Intercept	$0 \pm 1,36019E-16$
Slope	$42,55 \pm 2,83903E-$
Residual Sum of Squar	$4,93038E-32$
Pearson's r	1
R-Square (COD)	1
Adj. R-Square	1

Fig. 13B)

Il valore sperimentale ottenuto dal coefficiente angolare, diviso per il raggio e moltiplicato per il numero di avvolgimenti, ci restituisce il coefficiente cercato. Esso risulta essere di: $(9,25 \pm 0,24) \times 10^{-7} \text{ H/m}$. Nello svolgimento della misura abbiamo orientato gli avvolgimenti in modo che il campo da esse prodotto fosse perpendicolare al campo geomagnetico, ed utilizzato la sonda del gaussmetro per le misure di campo magnetico.

La misura si scosta da quella teorica per $0,02 \text{ H/m}$, ma possiamo ritenerla ad ogni modo consistente in quanto già la stima della resistenza delle bobine ci aveva mostrato che la coppia in questione non è una coppia di bobine di Helmholtz ideale. Tuttavia, essendo questa differenza praticamente inevitabile date le modalità di costruzione del dispositivo, possiamo ritenere comunque adeguata la misura e procedere in ultimo alla verifica del campo prodotto dalle bobine sfruttando ora la componente orizzontale del campo geomagnetico.

Verifica del campo magnetico prodotto dalle bobine

Al fine di avere un'ulteriore conferma sia del corretto funzionamento sia della correttezza della misura dell'intensità del campo prodotto dalle bobine, abbiamo svolto un'ulteriore misura utilizzando a nostro favore la componente orizzontale del campo magnetico terrestre. In questa misura abbiamo posizionato le bobine con asse orizzontale e posto una bussola nel punto C invece del gaussmetro.

Una misura che permette di utilizzare le bobine di Helmholtz per misurare la componente orizzontale del campo magnetico terrestre consiste nel ruotare l'asse delle bobine (e quindi il campo magnetico da esse generato su di esso) di un angolo noto α rispetto alla componente orizzontale del campo geomagnetico B_0 . A corrente nulla l'ago della bussola è orientato nella direzione del campo magnetico terrestre B_0 (componente orizzontale), cioè vero Nord. Facendo fluire corrente nelle bobine l'ago della bussola ruota. Cercando il valore di corrente che fa ruotare l'ago della bussola di 90° si può affermare che esiste la seguente relazione fra

$$B_O = B_S \cdot \cos(\alpha)$$

campo magnetico B_0 e campo prodotto dalle spire B_s e angolo α :

Non potendo però variare in maniera continua la corrente che attraversava il circuito, abbiamo deciso di procedere in modo diverso.

Per prima cosa abbiamo determinato l'intensità del campo magnetico terrestre usando il magnetometro mems del cellulare, più sensibile del gaussmetro, Abbiamo poi scelto un valore di corrente pari a 0.19 A e calcolato il campo B_s corrispondente (di seguito i calcoli). Successivamente abbiamo ricavato l'angolo che avrebbe verificato la condizione scritta sopra, abbiamo così trovato $\alpha=88^\circ$. Abbiamo poi osservato la direzione del campo orizzontale e abbiamo ruotato le bobine di α rispetto alla direzione predeterminata; se il campo prodotto dalle bobine fosse stato del valore corretto, anche se immersa nel campo delle bobine la bussola non si sarebbe dovuta muovere (perchè i due campi sono paralleli), e così è stato.

$$B_s = 9,25 \times 10^{-7} \frac{1,9 \times 10^{-1} \cdot 230}{0,05} = 8,1 \times 10^{-4} T = 8,1G$$

Da cui si ricava il valore di α :

$$\alpha = \arccos\left(\frac{B_0}{B_s}\right) = \arccos\left(\frac{0,172}{8,1}\right) = 88^\circ$$

Di seguito riportiamo una foto della rilevazione del magnetometro con evidenziato la componente orizzontale del campo e le foto della bussola nelle bobine a riposo e quando sottoposta al campo. Il comportamento osservato, se pur poco visibile dalle foto qui riportate, è proprio quello atteso.

Volevamo anche sfruttare la componente verticale del campo, ma ci siamo accorti che la bussola, posizionata verticalmente non funzionava in maniera ottimale, in quanto era soggetta anche all'effetto delle forze d'attrito e di quella gravitazionale, che andavano a modificare la posizione del disco magnetico. Per questo motivo abbiamo deciso di effettuare la misura solo con la bobina in orizzontale. Inoltre le normali bussole che si trovano in commercio sono progettate per intercettare senza eccessivi disturbi la componente orizzontale del campo geomagnetico.

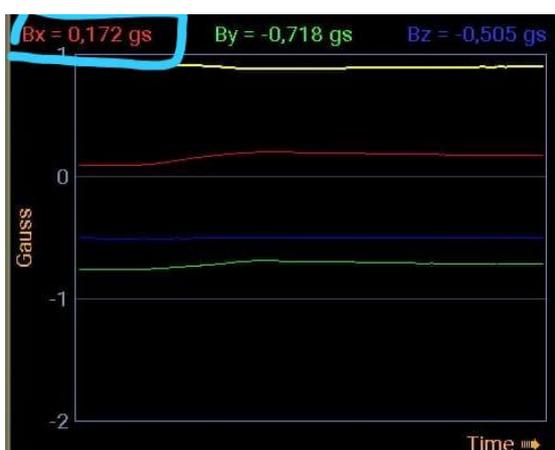


Fig. 14A)



Fig. 14B)



Fig. 14C)

CONCLUSIONE

Possiamo affermare che le misure ricavate risultino in linea con quelle che ci si aspetterebbe da bobine di Helmholtz. Bisogna però tenere conto del fatto che gli strumenti adoperati per la loro costruzione, nel nostro caso, non siano stati pensati per un utilizzo scientifico, ma per lo più per l'uso quotidiano. Questo porta quindi all'introduzione di errori, che per quanto possibile abbiamo cercato di ridurre al minimo. Nonostante tutto questo, le misure che abbiamo effettuato risultano quantomeno in linea con i risultati teorici. Come si vede dalle immagini fornite, l'ago della bussola non si muove una volta orientate le bobine dell'angolo calcolato, fornendo una verifica sperimentale, anche in questo caso, dei conti e delle misure effettuati in precedenza.