Misura del campo magnetico terrestre con le bobine di Helmholtz

Le bobine di Helmholtz sono una coppia di bobine con alcune caratteristiche particolari:

- hanno entrambe raggio R;
- hanno una lunghezza L molto più piccola del raggio R;
- sono disposte, a distanza R, in modo che gli assi di simmetria delle due bobine siano coincidenti;
- hanno lo stesso numero N di avvolgimenti;
- sono elettricamente collegate in serie, in modo che il verso di percorrenza delle due correnti sia lo stesso.

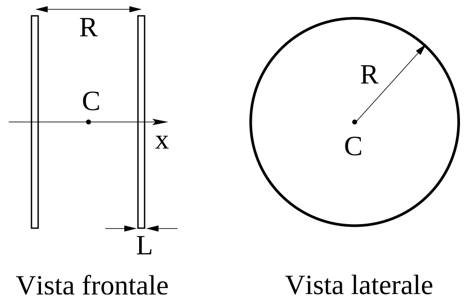

Figura 1: Schema di una coppia di bobine di Helmholtz

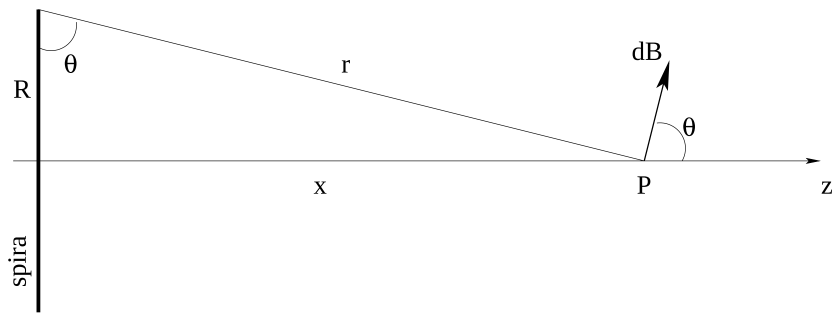

Figura 2: Definizione dei simboli usati nel testo

Vogliamo calcolare il campo prodotto da tali bobine nel punto C (Fig. 1). Si può iniziare il calcolo utilizzando la prima formula di Laplace, una relazione vettoriale che fornisce il campo $\vec{B}$ prodotto da un elemento di circuito $d\vec{l}$, percorso da una corrente i, in un generico punto P posto a distanza $\vec{r}$ da $d\vec{l}$:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

Nel nostro caso il circuito si può considerare formato da più spire circolari sovrapposte. Se il punto P giace sull'asse di simmetria delle spire, è sufficiente considerare soltanto le componenti del campo dirette lungo l'asse z (vedi Fig. 2), in quanto le altre componenti sono sicuramente nulle per ragioni di simmetria. Quindi si ha:

$$dB_z = dB\cos(\vartheta) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{r}{r^3} \frac{R}{r} dl$$

Integrando su dl si trova:

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{R}{r^3} \int dl = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{R}{r^3} 2\pi R = \frac{\mu_0}{2} i \frac{R^2}{r^3}$$

Poiché $r = \sqrt{R^2 + x^2}$, si può scrivere:

$$B_z = \frac{\mu_0}{2} i \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Considerando una bobina di N spire, tutte a distanza $\vec{r}$ dal punto P, il campo sarà dato semplicemente da:

$$B_z = \frac{\mu_0}{2} iN \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Calcolando il campo nel punto $x = \frac{R}{2}$ e considerando anche il contributo (identico) della seconda bobina, si ha:

$$B_{TOT} = \mu_0 iN \frac{R^2}{\left(R^2 + \frac{R^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\mu_0 \, i \, N}{R}$$

Le bobine di Helmholtz possono essere usate per una misura della componente orizzontale del campo magnetico terrestre. Facendo riferimento alla Fig. 3, in cui è schematizzata una vista dall'alto delle bobine, si nota che, se le bobine sono tenute verticali e il loro asse viene orientato nella direzione Est–Ovest, il campo magnetico prodotto dalla corrente nelle bobine ($\vec{b}$) risulta ortogonale a quello terrestre ($\vec{t}$) .

Per orientare le bobine si usa un aghetto magnetico, libero di rotare in un piano orizzontale, posto nel loro centro C, tenendo ovviamente spenta la corrente. Quindi si fa circolare una corrente nelle bobine, regolandone l'intensità in modo da orientare successivamente l'aghetto magnetico (che ruota rispetto a un goniometro) prima nella direzione di Nord-Est, poi verso Nord-Ovest: cioè a $\pm 45°$ rispetto alla direzione che aveva in assenza di corrente. In questo modo il campo magnetico prodotto dalle bobine è esattamente uguale, in modulo, alla componente orizzontale del campo terrestre. Se è noto il numero N di avvolgimenti, il campo terrestre può essere dunque facilmente determinato dalla relazione:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\mu_0 \, i \, N}{R}$$

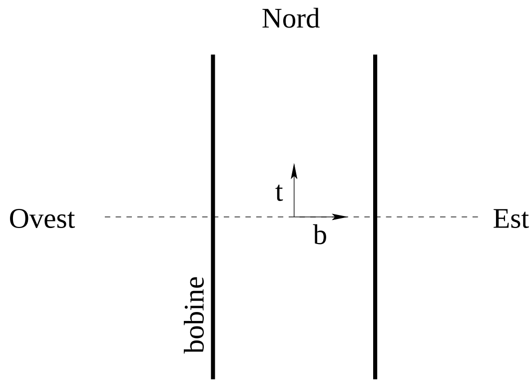

Figura 3: Schema del campo magnetico prodotto dalle bobine ($\vec{b}$) e del campo terrestre ($\vec{t}$)

misurando il raggio R delle bobine e la corrente i che le attraversa (i è dato dalla media dei due valori di corrente i_{NE} e i_{NO}, necessari per allineare l'aghetto rispettivamente in direzione Nord-Est e Nord-Ovest, così da correggere eventuali asimmetrie del sistema).

Si può anche, in modo più completo, misurare l'angolo di deflessione dell'ago magnetico della bussola per vari valori della corrente che circola nelle bobine. Poiché il campo terrestre t e il campo prodotto dalle bobine b sono legati dalla relazione:

$$b = t \tan \vartheta$$

(dove ϑ è l'angolo di cui si sposta l'ago per effetto della corrente), una interpolazione lineare fra le grandezze $\tan \vartheta$ e b fornisce proprio il valore t del campo terrestre come pendenza della retta interpolante. Con il nostro apparato ($N = 30$; $R = 0.278 \pm 0.002\,$m) abbiamo ottenuto i risultati mostrati in Fig. 5.

Il risultato ottenuto dall'interpolazione e la sua incertezza hanno questi valori:

$$t = 22.4 \pm 0.2\,\mu\mathrm{T}$$

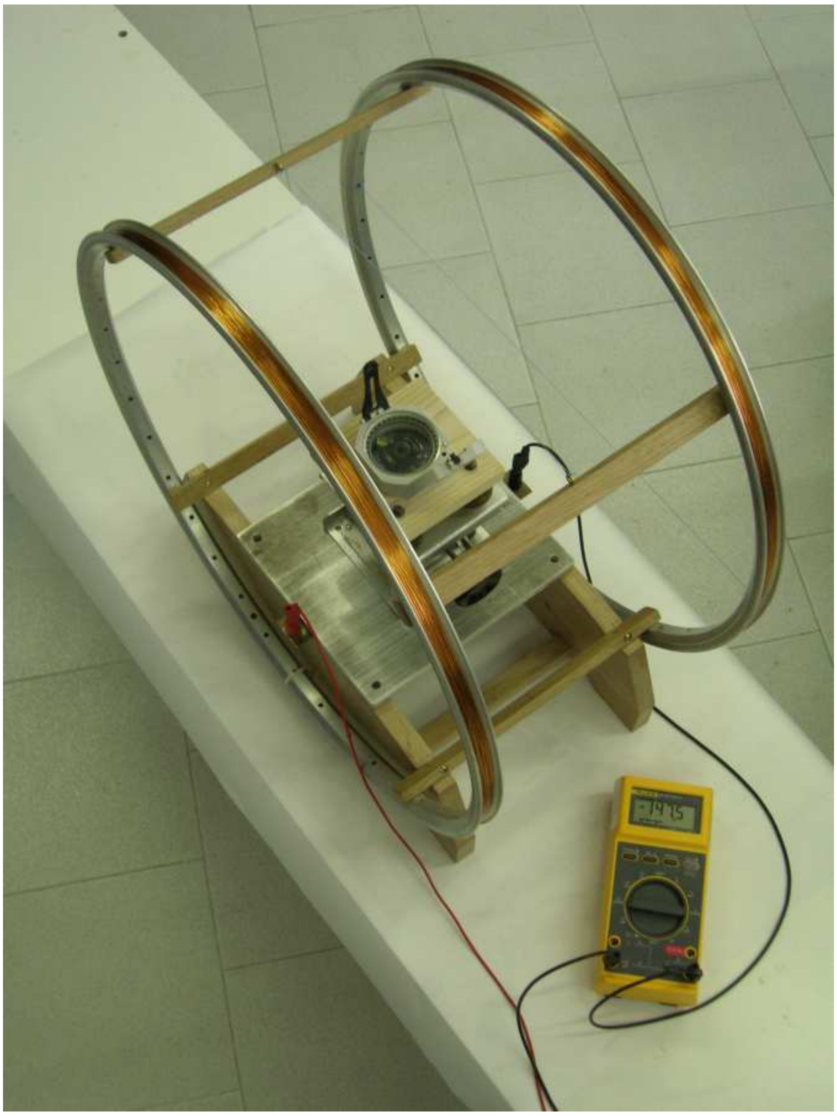

Figura 4: Fotografia delle bobine utilizzate per la misura

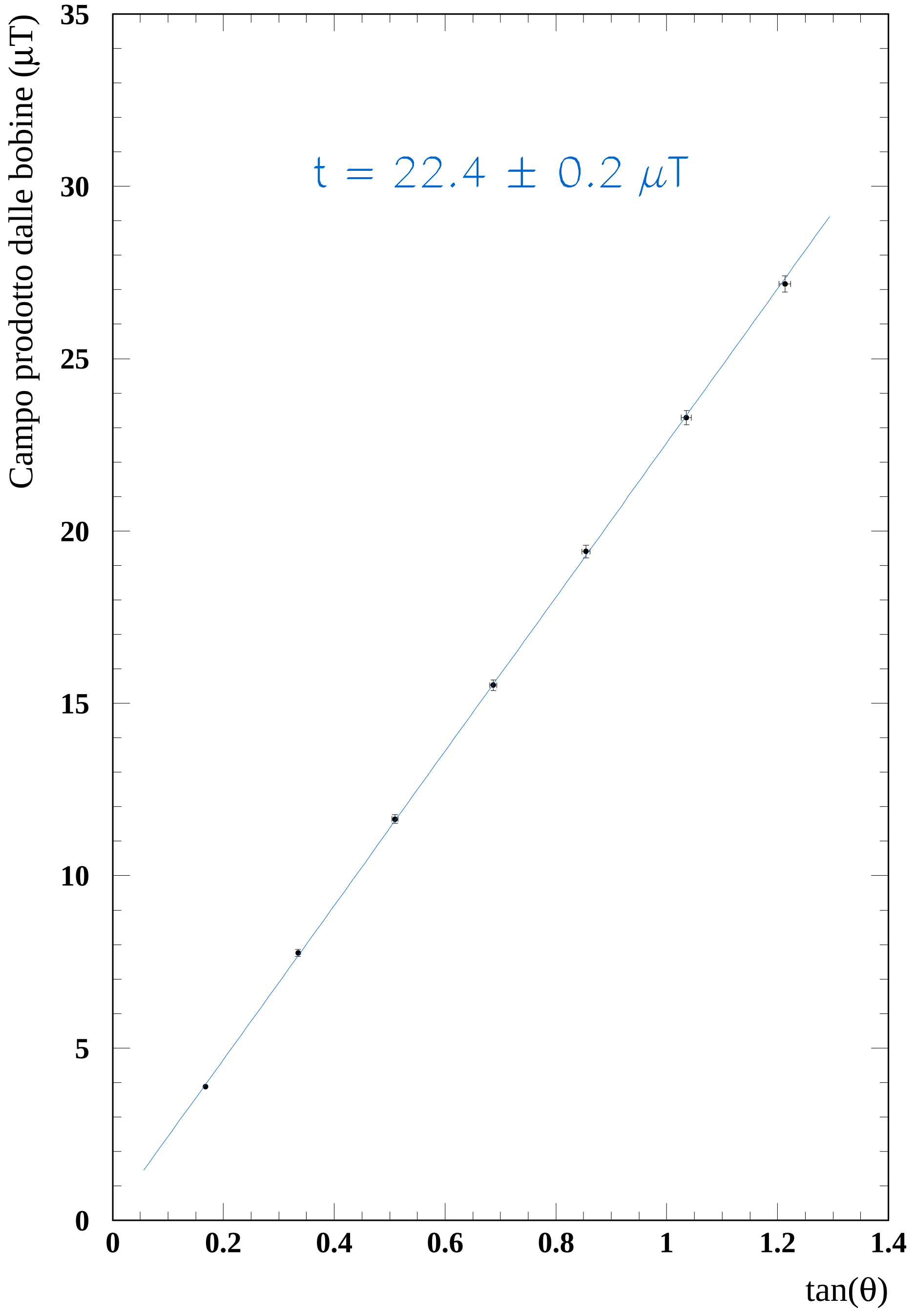

Figura 5: Andamento del campo magnetico prodotto dalle bobine per vari valori della tangente dell'angolo di deflessione ϑ dell'ago magnetico