

Leggi di Snell e indice di rifrazione

Francesco Alessandro Angiulli, Arianna Grossi, Francesco Zanni

Scopo dell'esperienza:

-Verifica della Terza legge di Snell o della rifrazione tramite determinazione dell'indice di rifrazione dell'acqua, da confrontare col valore teorico.

-Individuazione della condizione di riflessione totale e determinazione dell'angolo critico, da confrontare con il suo valore tabulato.

Cenni teorici:

Prima di esporre i risultati dell'esperienza svolta, è necessario identificare e definire le leggi e le grandezze in esame.

Indice di rifrazione: l'indice di rifrazione di un mezzo è una grandezza adimensionale definita dal rapporto tra la velocità della luce nel vuoto, pari a $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ e la velocità v della radiazione nel mezzo considerato, sempre tale per cui $v < c$.

$$n = \frac{c}{v} \geq 1$$

I valori di riferimento dell'indice di rifrazione nel nostro caso sono $n = 1$, per una radiazione che si propaga in aria, e $n = 1,33$ per la sua propagazione in acqua.

Tale indice risulta fondamentale per quanto segue, in quanto presente nella Terza legge di Snell.

Leggi di Snell:

Le Leggi di Snell sono leggi di ottica geometrica, branca dell'ottica basata sul fatto che la luce si propaghi tramite raggi rettilinei.

Esse valgono nel caso di mezzi trasparenti e omogenei, e definiscono il comportamento di una radiazione che incida su una superficie di separazione tra due mezzi di indice di rifrazione diverso, dove viene in parte riflessa e in parte rifratta.

Definiamo quindi tre raggi diversi, che formano angoli differenti con la normale all'interfaccia: il raggio incidente forma con la normale un angolo di incidenza θ_i , il raggio riflesso un angolo di riflessione θ_r , e il raggio rifratto un angolo di rifrazione θ_t .

Tali leggi, che andiamo ad enunciare qui sotto, possono essere ricavate applicando alle espressioni dei campi \vec{E} e \vec{B} dell'onda elettromagnetica considerata le condizioni di raccordo all'interfaccia tra materiali diversi. Senza dilungarsi nella trattazione, ne forniamo direttamente i risultati da cui ricavare le leggi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_i = \lambda_r \\ \lambda_t = \lambda_i \frac{n_1}{n_2} \\ \frac{2\pi}{\lambda_i} \text{sen}(\theta_i) = \frac{2\pi}{\lambda_r} \text{sen}(\theta_r) = \frac{2\pi}{\lambda_t} \text{sen}(\theta_t) \end{array} \right.$$

dove λ_i è la lunghezza d'onda del raggio incidente, λ_r quella del raggio riflesso e λ_t quella del raggio rifratto.

-Prima legge di Snell (o del piano di incidenza): essa definisce il piano di incidenza, contenente i raggi incidente, riflesso, rifratto e la normale alla superficie di separazione tra i due mezzi; tale piano è quindi ortogonale alla interfaccia tra i due mezzi.

- Seconda legge di Snell (o della riflessione): secondo tale legge, esiste una relazione di proporzionalità ed uguaglianza tra l'angolo di incidenza e l'angolo di riflessione, ossia

$$\theta_i = \theta_r$$

-Terza legge di Snell (o della rifrazione): essa stabilisce una relazione che lega angoli di incidenza e di rifrazione e indici di rifrazione dei due mezzi considerati. Chiamando n_1 l'indice di rifrazione del primo mezzo, quello da cui proviene la radiazione, e n_2 quello del secondo mezzo al di là della superficie rifrangente, si può scrivere che

$$n_1 \text{sen}(\theta_i) = n_2 \text{sen}(\theta_t)$$

Da essa si può notare che, nel passaggio da un mezzo meno rifrangente ad uno più rifrangente ($n_1 < n_2$), come nel nostro caso nel passaggio dall'aria all'acqua, il raggio rifratto tende ad avvicinarsi alla normale, e quindi l'angolo θ_t tende a diventare piccolo.

-Riflessione totale:

Esiste inoltre una condizione notevole, detta riflessione totale, che si verifica nel passaggio della radiazione da un mezzo più rifrangente ad uno meno rifrangente ($n_1 > n_2$), come nel nostro caso nel passaggio del raggio luminoso dall'acqua all'aria.

Infatti esiste un valore dell'angolo di incidenza, detto angolo critico θ_c , tale per cui l'angolo di rifrazione vale $\pi/2$. Per angoli di incidenza maggiori dell'angolo critico ($\theta_i > \theta_c$), non esiste un raggio rifratto, ma solo il raggio riflesso, avente quindi intensità pari a quella del raggio incidente.

Si può ricavare l'angolo critico in funzione degli indici di rifrazione dei mezzi applicando la condizione di riflessione totale:

$$n_1 \text{sen}(\theta_c) = n_2 \text{sen}(\pi/2) \rightarrow \theta_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

Nel nostro caso, considerando $n_2 = 1$ e $n_1 = 1,33$, ossia il passaggio dall'acqua all'aria, il valore atteso per l'angolo critico risulta essere $\theta_c = 49^\circ$.

STRUMENTI

- Contenitore trasparente;
- Carta millimetrata;

- Goniometro (sensibilità 1°);
- Righello (sensibilità 0,001 m);
- Puntatore LASER;
- Acqua.

Procedimento

L'esperimento si divide in due parti, nella prima parte si vuole ottenere l'indice di rifrazione dell'acqua partendo dagli angoli di incidenza e di rifrazione di un raggio di luce. Nella seconda parte l'obiettivo è lo stesso, ma si agisce sfruttando il fenomeno della riflessione totale che si ha quando un raggio di luce passa da un mezzo con indice di rifrazione più alto a uno con indice di rifrazione più basso incidendo sul piano di separazione tra i mezzi con un angolo superiore all'angolo limite.

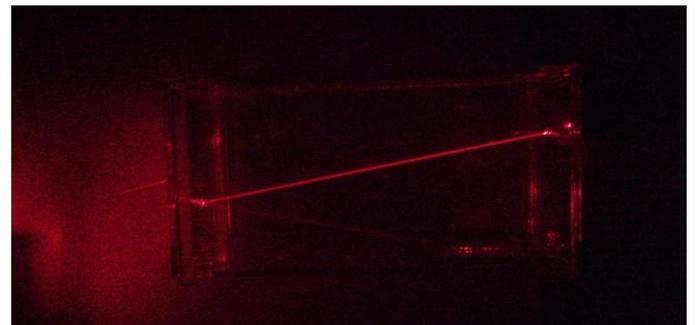
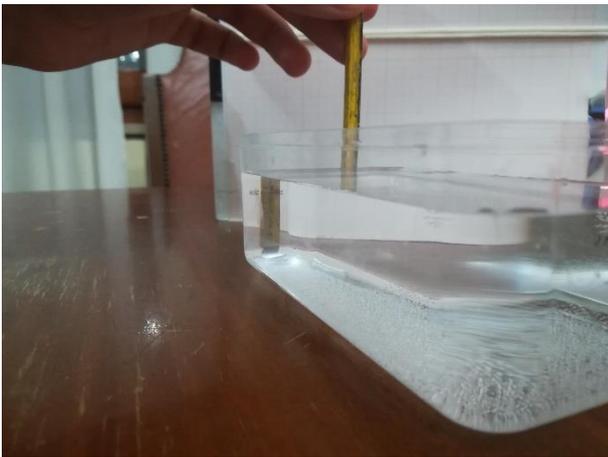
Il raccoglimento dei dati è stato effettuato in 3 modi:

- Nel primo caso sono state tracciate su un foglio le proiezioni di 3 punti particolari: il punto di partenza dal laser, il punto di incontro con la prima parete del contenitore e il punto di incontro con la seconda parete del contenitore. Una volta uniti i punti e tracciate le normali alle pareti è stato utilizzato un goniometro per misurare gli angoli;
- In un altro caso sono state proiettati sul foglio il punto di entrata e di uscita dal contenitore e infine il punto visto sulla parete esterna, poi sono state tracciate le normali alle pareti nei tre punti e sono state misurate le distanze tra normali successive. Tracciando i segmenti congiungenti due punti successivi si ottengono gli angoli di incidenza e di rifrazione (è possibile perché per un raggio di luce che attraversa un oggetto con facce parallele, l'angolo di incidenza di entrata e l'angolo di uscita coincidono). Sono stati trovati in questo modo 2 triangoli rettangoli e grazie alla trigonometria sono stati ricavati i seni dei due angoli tramite il rapporto tra l'ipotenusa e il cateto opposto all'angolo a cui si è interessati;
- L'ultimo modo è analogo al precedente tranne per il fatto che viene proiettato sul foglio il punto da cui parte il raggio e non quello di arrivo sulla parete finale. Sono stati costruiti i due triangoli rettangoli con le normali ed è stato calcolato il rapporto tra le lunghezze dei cateti per ottenere la tangente dell'angolo di incidenza prima e di rifrazione poi.

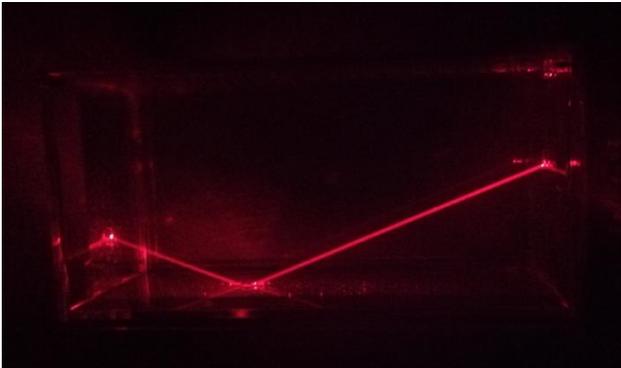
In ognuno dei tre casi presentati il laser è stato tenuto sul piano ortogonale alle pareti del contenitore utilizzato.

Per la riflessione totale il raggio laser è stato fatto incidere orizzontalmente su una parete del contenitore in modo tale che il raggio rifratto incidesse a sua volta su una delle pareti laterali. In quel punto avveniva riflessione e rifrazione, quest'ultima è stata visualizzata su uno schermo posto al di fuori del contenitore. A questo punto è stato fatto ruotare il laser fino a trovare l'angolo per cui sullo schermo non si visualizza nessun raggio, in queste condizioni si verifica la riflessione totale, per cui sono state prese le misure necessarie al calcolo dell'angolo che il raggio rifratto forma con la normale alla seconda parete.

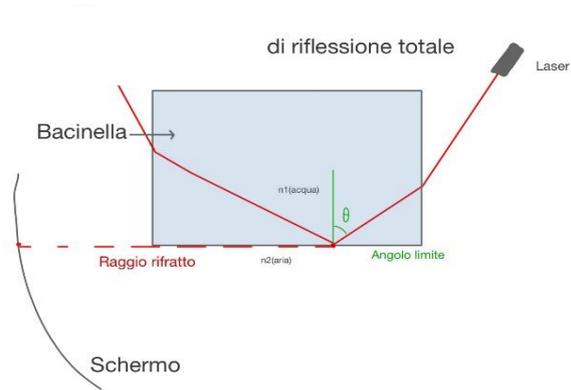
Un'altra osservazione del fenomeno della riflessione totale è stata effettuata ponendo una matita da un lato del contenitore e notando che oltre un certo angolo essa non è visibile da un osservatore che si trova oltre una delle pareti ortogonali a quella dietro la quale si trova la matita. Di quest'ultima era visibile solo il tratto che si trovava al di sopra della superficie dell'acqua, mentre la restante parte non si vedeva. Questo accade perché si può considerare la matita come una sorgente di luce, quindi i suoi raggi vengono riflessi totalmente sulla parete da cui si osserva. Si è notato che spostando il punto di vista in una posizione più defilata, la matita torna ad essere visibile, tuttavia la sua posizione sembra non coincidere con quella reale, questo accade perché i percorsi dei raggi rifratti non coincidono con quelli che dalla matita arrivano direttamente all'obiettivo. In allegato a questo documento si trovano video e immagini dove si può osservare questo fenomeno:



Riflessione totale e traslazione dell'immagine



Condizione di riflessione totale



Rifrazione del raggio luminoso

Dati e calcoli

Per ogni setup è stato raccolto un set di dati composto dal seno dell'angolo di incidenza e di rifrazione. I tre set di dati che sono stati raccolti sono i seguenti:

Primo set				Secondo set				Terzo set			
sin(θ_1)	Errore	sin(θ_2)	Errore	sin(θ_1)	Errore	sin(θ_2)	Errore	sin(θ_1)	Errore	sin(θ_2)	Errore
0,78	0,01	0,60	0,01	0,31	0,05	0,23	0,03	0,93	0,06	0,68	0,09
0,37	0,02	0,33	0,02	0,32	0,05	0,23	0,03	0,99	0,02	0,74	0,09
0,28	0,02	0,26	0,02	0,77	0,04	0,60	0,03	0,87	0,06	0,6	0,1
0,45	0,02	0,36	0,02	0,57	0,05	0,42	0,03	0,81	0,06	0,58	0,09
0,52	0,01	0,44	0,02	0,58	0,05	0,42	0,03	0,74	0,06	0,50	0,08
0,56	0,01	0,45	0,02	0,23	0,06	0,17	0,03	0,61	0,09	0,45	0,07
0,63	0,01	0,52	0,01	0,28	0,06	0,21	0,03	0,60	0,08	0,43	0,07
0,73	0,01	0,59	0,01	0,32	0,06	0,24	0,03	0,5	0,1	0,39	0,06
0,79	0,01	0,62	0,01	0,42	0,09	0,31	0,03	0,4	0,2	0,34	0,05
0,81	0,01	0,66	0,01	0,55	0,08	0,41	0,03	0,3	0,2	0,27	0,04
0,86	0,01	0,67	0,01	0,49	0,08	0,36	0,03	0,3	0,3	0,24	0,04

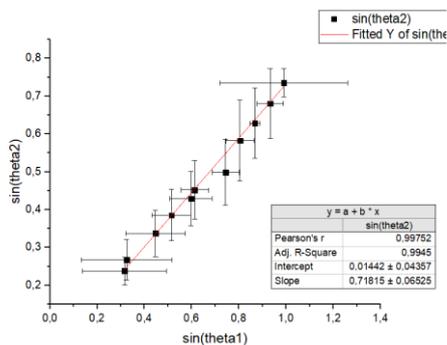
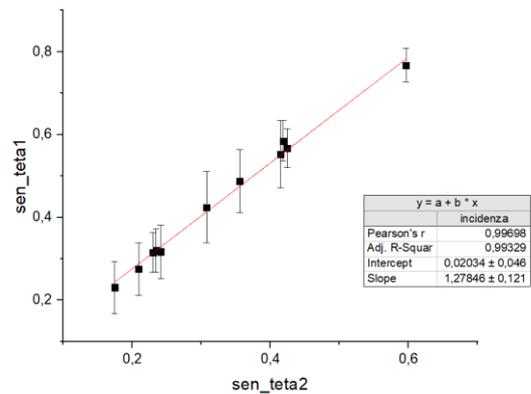
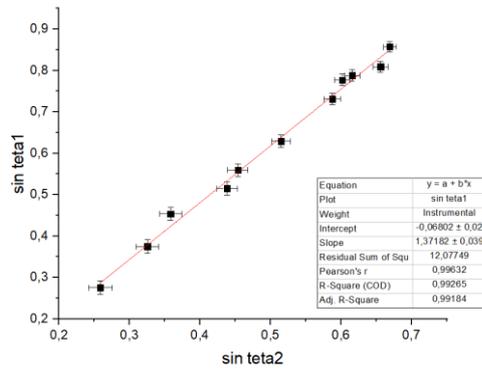
E per ogni set di dati è stata costruita una regressione lineare che verificasse la terza legge di Snell:

$$n_1 * \sin \theta_1 = n_2 * \sin \theta_2$$

Dalla quale, ponendo l'indice di rifrazione dell'aria pari a 1, si ricava una legge di tipo lineare, ovvero:

$$y = Ax + B$$

Dove x rappresenta $\sin \theta_2$, y rappresenta $\sin \theta_1$ e infine la pendenza della retta fornisce direttamente l'indice di rifrazione dell'acqua. Ci aspettiamo che l'intercetta B sia nulla (in caso contrario sarà indice di un errore sistematico). In seguito le tre regressioni ottenute



Nella terza regressione gli assi sono invertiti, di conseguenza la pendenza non rappresenta direttamente l'indice di rifrazione ma il suo reciproco.

I tre valori trovati come indice di rifrazione dell'acqua sono dunque:

- $n = 1,37 \pm 0,04$
- $n = 1,30 \pm 0,14$
- $n = 1,39 \pm 0,13$

Per quanto riguarda la riflessione totale i tre angoli limite misurati sono:

- $\theta_L = (52 \pm 1)^\circ \Rightarrow n = 1/\sin(\theta_L) = 1,27 \pm 0,02$
- $\sin(\theta_L) = (0,77 \pm 0,08) \Rightarrow n = 1/\sin(\theta_L) = 1,303 \pm 0,003$, $\theta_L = (50 \pm 7)^\circ$
- $\theta_L = (49 \pm 1)^\circ \Rightarrow n = 1/\sin(\theta_L) = 1,32 \pm 0,02$

Errori:

Per quanto riguarda gli errori, essi sono stati ricavati in modo diverso da ognuno:

-Gli errori sulle misure dirette (in due casi sulle lunghezze, in un caso sugli angoli) sono stati scelti valutando personalmente la precisione del proprio set-up sperimentale e della rilevazione delle misure. Gli errori da essi derivati sono stati ricavati da tutti tramite la propagazione degli errori, anche se tramite formule differenti in base al metodo di lavoro.

-Gli errori sul coefficiente angolare della retta di regressione, da cui ricavare l'indice di rifrazione del mezzo, sono stati ricavati tramite il programma di analisi dati Origin attraverso il metodo dei minimi quadrati.

Di seguito elenchiamo le formule di propagazione utilizzate:

Primo set-up sperimentale (misura diretta dell'angolo):

$$\delta \sin(\theta_L) = \cos(\theta_L) \cdot \delta(\theta_L)$$

$$n = \frac{1}{\sin(\theta_L)} \rightarrow \delta n = \frac{1}{\sin^2(\theta_L)} \delta \sin(\theta_L)$$

Dove θ_L è l'angolo limite e n è l'indice di rifrazione.

Secondo setup sperimentale:

$$\sin(\vartheta) = \frac{A}{B} \rightarrow \delta \sin(\vartheta) = \left(\frac{\delta A}{|A|} + \frac{\delta B}{|B|} \right) \cdot |\sin(\vartheta)|$$

$$\sin(\vartheta') = \frac{C}{D} \rightarrow \delta \sin(\vartheta') = \left(\frac{\delta C}{|C|} + \frac{\delta D}{|D|} \right) \cdot |\sin(\vartheta')|$$

$$\sin(\theta_L) = \frac{E}{F} \rightarrow \delta \sin(\theta_L) = \left(\frac{\delta E}{|E|} + \frac{\delta F}{|F|} \right) \cdot |\sin(\theta_L)|$$

$$n = \frac{1}{\sin(\theta_L)} \rightarrow \delta n = \frac{\delta \sin(\theta_L)}{\sin(\theta_L)} \cdot |n|$$

Dove ϑ e ϑ' sono gli angoli di incidenza e rifrazione, e A, B, D, E, F le lunghezze misurate, θ_L l'angolo limite.

Terzo setup sperimentale:

$$\tan(\beta) = \frac{A}{B} \rightarrow \delta \tan(\beta) = \left(\frac{\delta A}{|A|} + \frac{\delta B}{|B|} \right) \cdot |\tan(\beta)|$$

$$\tan(\delta) = \frac{G}{D} \rightarrow \delta \tan(\delta) = \left(\frac{\delta G}{|G|} + \frac{\delta D}{|D|} \right) \cdot |\tan(\delta)|$$

$$\delta = \arctan(\tan(\delta)) \rightarrow \delta(\delta) = \frac{1}{1 + \tan(\delta)^2} \cdot \delta \tan(\delta)$$

$$\beta = \arctan(\tan(\beta)) \rightarrow \delta(\beta) = \frac{1}{1 + \tan(\beta)^2} \cdot \delta \tan(\beta)$$

$$\delta \sin(\delta) = \cos(\delta) \cdot \delta(\delta)$$

$$\delta \sin(\beta) = \cos(\beta) \cdot \delta(\beta)$$

$$n = \frac{1}{m} \rightarrow \delta n = \frac{1}{m^2} \cdot |\delta m|$$

dove δ e β sono gli angoli di incidenza e rifrazione, e A, B, D, G le lunghezze misurate, e m il coefficiente angolare della retta.

CONCLUSIONI

A causa delle diverse procedure seguite per le misure si osserva che i valori dell'indice di rifrazione e soprattutto dell'errore risultano molto diversi:

- Il primo set si riferisce ai dati misurati tramite il goniometro, l'indice di rifrazione è leggermente sovrastimato ma l'intervallo di incertezza si sovrappone al valore atteso.
- Il terzo e il secondo set di dati si riferiscono ai dati elaborati in un caso mediante il rapporto tra le lunghezze dei cateti, e nell'altro tramite il rapporto tra ipotenusa e il cateto opposto all'angolo cercato. Il valore di n , essendo l'errore in percentuale grande, può considerarsi consistente con il valore atteso, ai limiti dell'intervallo di incertezza.

L'errore risulta essere elevato poiché, data l'imprecisione del set-sperimentale e del tipo di procedura, sono stati scelti errori elevati sulle misure dirette.

Possibili errori sistematici inoltre potrebbero essere dovuti alla strumentazione, ad esempio pareti non perfettamente ortogonali al piano di lavoro, oppure dovuto allo spessore delle pareti, anche se piccolo, che ha influito sulle distanze misurate. Un altro errore potrebbe essere dovuto al fatto che il piano di incidenza del raggio non fosse perfettamente ortogonale alle pareti. Infine si nota che il valore di n relativo al primo set, che riguarda quindi gli angoli misurati con il goniometro, risulta più accurato rispetto agli altri due. Riteniamo che il motivo sia la misura più diretta del dato cercato, infatti passando per misure secondarie l'errore aumenta di molto.

Questa differenza si nota anche nelle misure dell'angolo limite, l'errore infatti risulta minore nel caso in cui l'angolo viene misurato in modo diretto col goniometro. In questo caso infine due misure su tre si sovrappongono al valore cercato, ovvero 48,75 gradi.