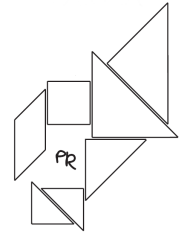




COPPA HILBERT UNDER 15

PRIMA EDIZIONE

Parma – 4 dicembre 2008



Istruzioni Generali

- * Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero **intero**, compreso tra **0000** e **9999**.
- * Se la quantità richiesta è un numero non intero (cioè se è un numero con la virgola, tipo 118,73) va indicata la sua parte intera (cioè si toglie la parte dopo la virgola prima di rispondere; nell'esempio si dovrebbe rispondere **0118**).
- * Se la quantità richiesta è un numero negativo, si indichi **0000**.
- * Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, si indichi **9999**.
- * Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2361 \quad \sqrt{7} = 2.6458 \quad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- * **20 minuti dall'inizio**: termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà assegnato d'ufficio il primo problema della lista).
- * **60 minuti dall'inizio**: termine ultimo per fare domande sul testo.
- * **120 minuti dall'inizio**: termine della gara.

1. Famiglie numerose

Numeruto Matemaki, il giovane e promettente mateninja del Villaggio della Retta, ha appena conosciuto i quattro fratelli Pyuga, ognuno dei quali ha una sorella più giovane di sé. Sapendo che Treji, il primogenito, è maschio, quanti figli ci sono in quella famiglia?

2. La dieta dell' *oh-capo*

Da quando Madamigella Tsumate è il quinto *oh-capo* del Villaggio della Retta, è diventato prioritario per tutti i mateninja adottare una dieta corretta e ipocalorica. Questo per Jiccho e il suo clan è un bel problema, perché essi convertono le calorie in poteri mateninja! Supponiamo che una mela abbia il 95% di calorie in meno di un cioccolatino. Quante mele deve mangiare Jiccho per avere a disposizione tutte le calorie di un cioccolatino?



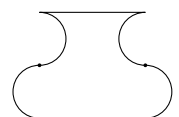
3. Un mateninja del passato

I mateninja più piccoli, detti Piccin, devono studiare anche la storia delle arti mateninja. Il piccolo Kohordinato è alle prese con un rotolo di pergamena che racconta la biografia del celebre matematico Niccolò Tartaglia (la leggenda vuole che anch'egli fosse un ninja). Il rotolo non è però molto diretto sulla sua data di morte. Dice infatti: "Morì nel XVI secolo; la somma delle cifre dell'anno è 18 e la cifra delle unità supera di 2 quella delle decine". In che anno morì Tartaglia?



4. Lo stemma del Clan Matemaki

Numeruto ha deciso che il clan Matemaki da lui fondato diventerà nobile e importante: ha quindi bisogno con urgenza di uno stemma. Il simbolo sul quale sta lavorando è molto bello e anche molto simbolico ed egli non vede l'ora di poterlo sfoggiare di fronte a Segnatura, la bella mateninja di cui è innamorato. Lo stemma rappresenta un vaso, simile a quello qui a fianco. Sapendo che i due tratti orizzontali sono lunghi 15 cm e che i 4 archi di circonferenza sono delle mezze circonferenze di raggio 4 cm, quanti cm² misura l'area del simbolo?



5. Amebe alla riscossa

Sotto la supervisione dell'*oh-capo* Tsumate, Segnatura è in laboratorio e “coltiva” delle amebe. All’inizio ce n’è 1 sola, poi ogni minuto le amebe aumentano:

- ★ di 5 unità se il loro numero è multiplo di 10,
- ★ di 3 unità altrimenti.

Quante amebe ci sono dopo che sono passati 30 minuti?



6. Due mesi passano di corsa

Oggi è il 4 dicembre. L’atletico mateninja Romb Lee si allena per la maratona che ci sarà fra 2 mesi, il 4 febbraio. A partire da domani andrà a correre tutti i giorni, facendo 1 km il primo giorno, 2 km il secondo giorno, 3 km il terzo e così via fino al 4 gennaio (31 km). Arrivato al culmine dell’allenamento, egli comincerà a calare la lunghezza da correre di un km al giorno per arrivare in forma sì, ma riposato al giorno della gara (30 km il 5 gennaio, 29 km il 6 gennaio e così via). Il 4 febbraio c’è la gara (42 km). Quanti chilometri avrà percorso in totale nei due mesi?



7. I triangoli di Isoshilo

Gli esercizi di allenamento inventati dal maestro Isoshilo sono sempre imprevedibili e spesso sconvolgenti. Oggi ha chiesto ai suoi allievi Sakkiente, Segnatura e Numeruto di tracciare per terra tanti triangoli isosceli diversi, tutti con un perimetro di 41 metri ed i lati che misurino un numero intero di metri. Quanti triangoli possono tracciare al massimo Sakkiente e gli altri? (Se secondo voi sono infiniti, rispondete **9999**.)



8. La formica cubista

Shino Abakome dedica molto tempo ad addestrare i suoi insetti, che sono creaturine obbedienti e dotate di grandi competenze ninja e matematiche. Ha messo Epsilon, la sua formica più in gamba, su un vertice di un cubo di 100 mm di lato. L’insetto deve camminare sulla superficie del cubo fino al vertice opposto. Quanti millimetri deve fare come minimo per arrivarci?



9. Chi non sa far...l’insegna

Il mastro carpentiere del Villaggio della Retta deve montare l’insegna di un negozio, ma ha subito uno dei terribili scherzi illusori di Numeruto, è rimasto confuso e non si ricorda più la parola che deve comporre. Deve collocare le quattro lettere “A”, “Y”, “B”, “B”. In quanti modi diversi può sbagliare? (Ovvero, quante sono le parole che può comporre diverse dall’insegna giusta?)

10. Il rettangolo di Isoshilo

Isoshilo è uno dei più forti tra i mateninja di livello Mastin del villaggio e i suoi sinistri poteri nelle arti geometriche gli sono valsi il titolo di “Ninja Isometria”. Oggi ha chiesto a Segnatura di tracciare per terra un rettangolo con i lati che misurano un numero intero di metri e con una superficie di 1020 m². Qual è il più piccolo valore (in metri) che può assumere il perimetro di un tale rettangolo?



11. La famiglia di Segnatura

Poco o nulla si sa della famiglia di Segnatura, ma Numeruto, che ha una cotta per lei, una volta è andato a conoscere sua madre per cercare di ingraziarsela e scoprire qualcosa della bella mateninja. La mamma di Segnatura però si è rivelata un personaggio dispettoso e un po’ fissato (strano, conoscendo la figlia!) e l’unica informazione che ha ottenuto è stata che il prodotto delle età dei suoi figli (in anni) vale 1664 e il minore ha la metà degli anni del maggiore. Qual è la somma delle età dei figli?

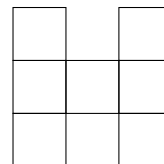
12. Doppio allenamento

Romb Lee è un vero fanatico degli allenamenti, forse superato in questo solo dal suo maestro Sei. Oggi è andato a trovare proprio lui e l'ha trovato a fare flessioni. Subito Lee, pervaso di entusiasmo giovanile, si è unito al suo maestro e ora stanno facendo flessioni allo stesso ritmo, ciascuno contando ad alta voce quante ne ha fatte finora. Se in questo momento Sei dice 467 e Lee dice 22, quante flessioni deve ancora fare ciascuno di loro affinché quelle fatte dal maestro siano esattamente il doppio di quelle fatte dall'allievo?



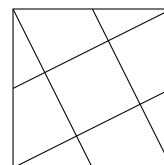
13. Non ci capisce un'acca

Sakkiente sta studiando una tecnica matematica che si tramanda nella sua famiglia. Per prepararla si tracciano 7 quadratini a forma di H come in figura e poi vi si dispongono dei semi di matelia (rara pianta esotica). Ogni quadrato deve contenere un numero diverso di semi, non meno di 1 e non più di 9, inoltre il prodotto dei tre numeri su ciascuna delle tre strisce che formano la H deve essere sempre lo stesso. Quello che va fatto dopo per Sakkiente è banale mateninjutsu, ben alla portata delle sue capacità, ma questa cosa dei semi lo sta un po' bloccando. Riuscite a dargli una mano? Rispondere il numero che si ottiene mettendo in ordine dalla minore alla maggiore le cifre corrispondenti alle quantità di semi nei quattro angoli.



14. Il parco del villaggio

La pianta del Villaggio del Quadrato... è quadrata e assomiglia a quella in figura. Le quattro strade principali partono dai vertici e cadono nel punto medio di uno dei lati opposti. Il quadrato più piccolo, formato dalle quattro strade, è un grande parco all'interno del quale sorge il palazzo dell'*oh-capo*. Sapendo che il lato del villaggio è di 500 metri, quante *are* misura la superficie del parco? (Un'ara è la superficie di un quadrato di lato 10 metri.)



15. Consegne a domicilio

La moneta utilizzata dai mateninja è il *pyu*, che, come l'euro, si suddivide in centesimi. Nel Villaggio della Retta i ninja messaggeri a cui vengono affidate importanti consegne a distanza, chiedono 2,75 *pyu* per il primo quarto di km e 15 centesimi per ogni quarto di km in più, mentre quelli del Villaggio del Quadrato chiedono 4 *pyu* per il primo quarto di km e 10 centesimi per ogni quarto di km in più. Qual è la distanza (in metri) per cui si paga lo stesso prezzo? (Se secondo voi non esiste, rispondete **0000**.)

16. La prima prova dell'esame da Bravin

Quando i Piccin hanno fatto abbastanza esperienza, possono fare l'esame per raggiungere il livello di Bravin. Oggi c'è la prima prova dell'esame: Numeruto e gli altri mateninja di grado Piccin sono in aula ed affrontano un duro compito teorico. Quattro numeri primi si scrivono nel seguente modo:

AA BAB BACD AAAC



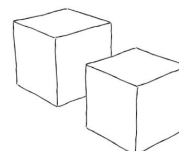
Sapendo che ogni lettera rappresenta una cifra, che a lettere uguali corrispondono cifre uguali e che a lettere diverse corrispondono cifre diverse, che numero è *ABCD*?

17. L'importanza della riserva

Tra i villaggi dei mateninja si tiene ogni anno una entusiasmante gara a squadre di mateninjutsu, riservata ai ninja di livello Piccin. Ogni villaggio partecipa con una squadra di 7 titolari più una riserva. Gli 8 componenti della squadra del Villaggio della Retta hanno con sé una media di 27,34 *pyu* a testa. Una volta sedutisi al tavolo in 7, la loro ricchezza media scende a 23,58 *pyu*. Quanti soldi ha in tasca la riserva? (Si esprima il valore in centesimi di *pyu*, ad esempio se avesse 22,16 *pyu*, dovrete rispondere **2216**.)

18. Cubetti ninja

Kohordinato è ancora piccolo (non ha nemmeno concluso l'accademia dei Piccin) e molto legato ai suoi giocattoli. Possiede ad esempio un certo numero di cubetti, tutti delle stesse dimensioni, ciascuno con le facce bianche o nere, colorati in modo che non ce ne siano due esattamente uguali (nemmeno se li si gira in qualche modo). Quanti possono essere al massimo i cubetti di Kohordinato?

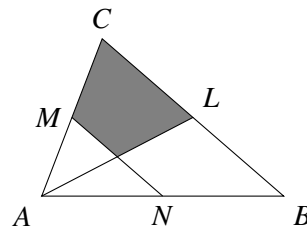


19. Amebe fuori controllo

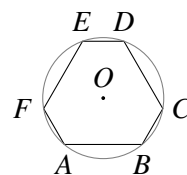
Segnatura ad un certo punto si è stufata dell'esperimento del problema 5, e ha deciso di andare ad allenarsi. Comunque le amebe hanno continuato a moltiplicarsi anche in sua assenza, per tutto il tempo. Quante amebe ci sono dopo 24 ore esatte dall'inizio dell'esperimento, quando Segnatura torna e trova il laboratorio invaso e devastato?

20. La seconda prova dell'esame da Bravin

La seconda prova dell'esame da Bravin è una prova sul campo. I giovani mateni-
nja devono dimostrare di sapersi orientare perfettamente. La prova si svolge in un campo triangolare ABC di 10000 m^2 di superficie. Nei punti medi dei lati L, M, N (vedi figura) stanno tre Mastin che li controllano. Tutti i concorrenti devono stare all'interno del campo, in prossimità del vertice C , senza superare né il segmento che va da M a N , né quello che va da L ad A . Quanti m^2 misura la zona del campo che possono occupare (vale a dire l'area grigia in figura)?

**21. Il nuovo stemma**

Quando Segnatura ha visto lo stemma con il vaso su cui Numeruto stava lavorando nel problema 4, l'ha preso in giro per tre giorni. Offeso, egli ha deciso questa volta di disegnare uno stemma meraviglioso, che desti l'ammirazione di tutti. La bozza da cui sta partendo è un esagono irregolare $ABCDEF$, inscritto in una circonferenza di centro O e raggio $5\sqrt{2}$ cm. Numeruto vuole fare in modo che i lati AB, CD, EF siano tutti lunghi 10 cm, e inoltre che i lati BC, DE, FA abbiano tutti la stessa lunghezza, diversa da quella di AB . Si domanda allora: quanti gradi dovrà misurare l'angolo \widehat{BOC} affinché il simbolo venga come vuole lui? (Se secondo voi non è possibile, rispondete **0000**.)

**22. Il cerchio di Isoshilo**

Questa mattina il maestro Isoshilo deve aver mangiato pesante, perché è arrivato di nuovo con un esercizio di allenamento assurdo. Ha tracciato per terra una grandissima circonferenza e vi si è piazzato in mezzo, poi ha chiesto a Sakkiente, Segnatura e Numeruto di disporsi sulla circonferenza in tre punti A, B e C tali che gli archi consecutivi AB e BC siano rispettivamente terza parte e dodicesima parte della circonferenza. Dopo avere controllato che le posizioni dei tre studenti fossero esatte, chiede a Numeruto quanti gradi misura l'angolo \widehat{ABC} . Numeruto è nel punto C , quindi non può misurare l'angolo a occhio e va nel panico. Segnatura ghigna dal punto B , ma Sakkiente ha un'aria di sufficienza dal punto A : se anche lui sa la risposta, deve essere possibile calcolarla senza altre informazioni. ... Sapreste rispondere al posto di Numeruto?

23. Pagine e pagine di studio

Segnatura apre il libro di arti magiche ad una pagina a caso (compresa tra 200 e 300) e, presa da una bizzarra ispirazione, somma i numeri di pagina di 9 pagine consecutive a partire da quella, nessuno dei quali finisce per 8. Segnatura nota che il totale è divisibile per 7. Quanto vale la somma che ha calcolato? (Se secondo voi c'è più di una risposta possibile, indicate **0000**.)

24. La terza prova dell'esame da Bravin

La terza e ultima prova dell'esame di Bravin è una prova a sorpresa. Numeruto è stato convocato con altri alle 9 del mattino. Nella sala c'erano alcuni candidati, alcuni maestri e l'*oh-capo* del Villaggio della Retta, che ha chiesto a tutti di stringere le mani con tutti una volta e una volta soltanto. (Anche lui ha partecipato.) Subito dopo sono usciti i maestri e l'*oh-capo* ha detto: "Vediamo quanto buono è il vostro spirito di osservazione: quante persone c'erano in questa sala prima che uscissero i maestri? Vi aiuterò con un indizio: le strette di mano sono state in tutto 200 (forse non ve ne siete accorti, ma io ad alcuni maestri ho stretto la mano non una, bensì due volte, e queste sono state le uniche eccezioni alla regola che avevo stabilito)." Sapreste aiutare Numeruto a dare la risposta corretta?

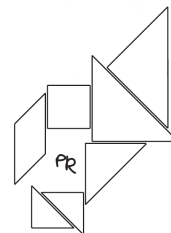




COPPA HILBERT UNDER 15

PRIMA EDIZIONE

Parma – SOLUZIONI – 4 dicembre 2008



Nr.	Problema	Soluzione
1	Famiglie numerose	0005
2	La dieta dell' <i>oh-capo</i>	0020
3	Un mateninja del passato	1557
4	Lo stemma del Clan Matemaki	0240
5	Amebe alla riscossa	0101
6	Due mesi passano di corsa	1003
7	I triangoli di Isoshilo	0010
8	La formica cubista	0223
9	Chi non sa far... l'insegna	0011
10	Il rettangolo di Isoshilo	0128
11	La famiglia di Segnatura	0037
12	Doppio allenamento	0423
13	Non ci capisce un'acca	1368
14	Il parco del villaggio	0500
15	Consegne a domicilio	6500
16	La prima prova dell'esame da Bravin	1973
17	L'importanza della riserva	5366
18	Cubetti ninja	0010
19	Amebe fuori controllo	4801
20	La seconda prova dell'esame da Bravin	3750
21	Il nuovo stemma	0030
22	Il cerchio di Isoshilo	0105
23	Pagine e pagine di studio	2457
24	La terza prova dell'esame da Bravin	0020