COPPA HILBERT 2009

GARA DI MATEMATICA A SQUADRE

Parma, 20 marzo 2009

In collaborazione con
Dipartimento di Matematica Università di Parma
Liceo Scientifico "G.Marconi" – Parma

con il patrocinio di
Comune di Parma
Provincia di Parma

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, ove non altrimenti indicato, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore o uguale a x.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \qquad \sqrt{3} = 1.7321 \qquad \sqrt{5} = 2.2360 \qquad \sqrt{7} = 2.6458 \qquad \sqrt{11} = 3.3166$$
$$\pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà assegnato d'ufficio il primo problema della lista).
- **30 minuti dall'inizio**: termine ultimo per fare domande sul testo.
- **120 minuti dall'inizio**: termine della gara.

20 Marzo 2009

Gara a Squadre – Testi dei problemi

1. La luce sulla cima

Il robot paranoico Marvin è sul bordo del cornicione della torre A della *Megadodo Publications*, la casa editrice della *Guida Galattica per AutoStoppisti* (G^2AS) a 78 metri di altezza, ha appena terminato la discussione esistenziale con il Frogstar Robot Tank e guarda verso la vetta dell'unica collina di Ursa Minor B. In effetti, guarda proprio la luce in cima dell'antenna sulla vetta della collina: per farlo, alza la testa di 30 gradi. Sapendo che la collina è alta 856 m, l'antenna è alta 6 m e gli occhi di Marvin sono a 2 m dal cornicione, qual è la distanza in metri tra gli occhi di Marvin e la cima dell'antenna?

2. Il quadro comandi

Per attivare il quadro comandi della navetta spaziale Heart of Gold, composto da 8 file di 20 pulsanti ciascuna, Zaphod Beeblebrox, l'ex-presidente della Galassia, deve schiacciare 4 pulsanti consecutivi, in un ordine qualunque, ma non sa quali sono, né se sono disposti in orizzontale, in verticale o in diagonale. Quanti tentativi al massimo deve fare per attivare il quadro comandi?

3. Alla stazione ipergalattica

In una stazione ipergalattica vicino ad Arcturus, i viaggiatori formano un'unica coda per accedere agli sportelli della biglietteria ed è sempre quello in testa alla coda che si rivolge ad uno degli sportelli disponibili. Nove viaggiatori sono in coda, con tre sportelli in funzione; impiegano tempi diversi, una volta davanti allo sportello, per acquistare i propri biglietti: 4, 6, 9, 11, 15, 36, 38, 40 e 45 minuti. Il tempo impiegato per terminare le operazioni di acquisto è stato il minimo possibile con le condizioni descritte. Qual è stato il tempo impiegato?

4. Il tempo di Deep Thought

Per tenere conto del tempo di elaborazione, richiesto da Deep Thought, per produrre la Risposta alla *Domanda Definitiva* sulla Vita, l'Universo e il Tutto, il Sindacato Unico di Filosofi e Altri Pensatori (SUFAP) ha predisposto una clessidra ad acqua formata da due coni, collegati nei vertici. L'acqua riempie il cono inferiore. La clessidra viene girata e l'acqua inizia a scendere; dopo 2009 anni, l'acqua è esattamente a metà altezza del cono inferiore. L'acqua continua a cadere regolarmente. Dopo quanti anni da quando la clessidra del SUFAP è stata girata, l'acqua sarà tutta nel cono inferiore?

5. Il gioco di Trillian e Arthur

Aspettando il ritorno di Zaphod, Trillian e Arthur fanno questo gioco. Trillian sceglie cinque numeri diversi tra 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, fa il prodotto dei cinque e comunica il risultato ad Arthur che deve dire se la somma dei cinque numeri è pari o dispari. Qual è il numero più grande che Trillian può dire in modo che Arthur non sia in grado di determinare con certezza la risposta? (Ad esempio, se Trillian dicesse 1680, dalla scomposizione in fattori primi $1680 = 2^4 \times 3 \times 5 \times 7$, Arthur capirebbe addirittura che i numeri scelti devono essere 2, 4, 6, 5 e 7; saprebbe dunque rispondere con certezza che la somma è pari.)

6. I tre orologi
Secondo la G^2AS, nella sede del Controllo Galattico Geo-temporale, su enormi pareti, ci sono orologi che indicano l'ora esatta di molti pianeti. In un angolo, ci sono orologi analogici a lancette, che indicano l'ora degli unici tre pianeti nell'universo dove il giorno è diviso in 12 ore da 60 minuti: Fallia, Ciceronicus e Bethselamin. Quando Trillian guarda gli orologi l'orologio di Fallia segna le 7, quello di Bethselamin segna le 11 e quello di Ciceronicus segna le 2. Ma, mentre passa un'ora sull'orologio di Fallia, quello di Ciceronicus si muove di un'ora e 20 minuti e, mentre l'orologio di Bethselamin conta 12 ore, quello di Fallia ne conta 36. Che ora segnerà l'orologio di Fallia la prima volta che quelli di Bethselamin e di Ciceronicus segneranno la stessa ora? Si dia la risposta utilizzando le prime due cifre per l'ora, le ultime due cifre per i minuti.

7. Un problema di estetica, I
Discutendo di estetica con il Blagulon Kappa Computer, il robot paranoico Marvin prende un foglio di carta rettangolare di dimensioni 16 cm e 25 cm, lo piega lungo una diagonale, poi incolla le parti sovrapposte. Qual è il valore in cm^2 dell'area del poligono ottenuto?

8. Le magliette degli umanoidi
Ford Prefect corre a prendere magliette per i 4 umanoidi che viaggiano sulla Heart of Gold: Trillian ne voleva una azzurra. In un cassetto ci sono 7 magliette rosse e 8 magliette azzurre, ma Ford ne prende quattro senza guardare. Qual è la probabilità che almeno una sia azzurra? Si dia la risposta scrivendo le prime quattro cifre del risultato diverse da 0,1 e 9, nell'ordine in cui compaiono. (Ad esempio, se il risultato fosse $\frac{5}{7} = 0.714285714\ldots$, si dovrebbe scrivere 7428.)

9. Il soprammobile di Slartibartfast
Nello studio di Slartibartfast, c'è un soprammobile che consiste di quattro sfere di marmo di diametro 1.2 dm, bloccate in una scatola trasparente, di base quadrata di lato 2.4 dm senza coperchio; al centro, sopra alle quattro sfere di marmo, è appoggiata una sfera di acciaio di diametro 1.37 dm. Qual è l'altezza in mm del soprammobile?

10. Il poligono della SCS
Nella hall della Sirius Cybernetics Corporation, un pannello decorativo consiste di un poligono regolare di 33 lati iscritto in una circonferenza. Come esercizio, il robot Marvin controlla tutti i trapezi (compresi i parallelogrammi) che si possono generare con 4 dei 33 vertici del poligono. Quanti trapezi ha controllato?

11. Un problema di estetica, II
Il Blagulon Kappa Computer, che non approva il senso estetico del robot Marvin, prende un foglio di carta rettangolare delle stesse dimensioni di quello usato nel problema **7.**, per piegarlo in modo completamente diverso da quello di Marvin. Infatti, lo piega sovrapponendo due vertici opposti, poi incolla le parti sovrapposte. Qual è il valore in cm^2 dell'area del poligono ottenuto?

12. I litigi su Damogran
Su un'isola di Damogran, ci sono contadini molto litigiosi. Ognuno di questi è in lite con tutti gli altri per motivi territoriali; per questo motivo si sono rivolti ad un giudice di pace che ha aperto una pratica per ogni contesa. Sapendo che il giudice ha nel suo ufficio 438516 pratiche, quanti contadini ci sono sull'isola?

13. La beneficenza dei neo-matematici

Cento neo-matematici dei laboratori della Sirius Cybernetics Corporation hanno escogitato un sistema per vincere al casinò di Santraginus 5. Hooloovoo, il capo, mette i 3 dollari altariani con cui il gruppo di neo-matematici inizia a giocare; ogni sera che gioca, il gruppo triplica il patrimonio. Per non dar adito a sospetti, giocano una volta ogni due settimane, sempre di giovedì. Hanno iniziato giovedì 20 marzo 2008; hanno smesso ieri. Restituiti a Hooloovoo i 3 dollari che aveva investito all'inizio, i cento neo-matematici si sono divisi il patrimonio totale vinto in parti uguali, arrotondando ad un numero intero di dollari, e hanno donato il resto in beneficenza. Quanti dollari altariani hanno donato in beneficenza?

14. La sveglia su Eadrax

Sul pianeta Eadrax un giorno dura 100 ore, un'ora dura 100 minuti, un minuto dura 100 secondi. Nella piazza principale della capitale, in cima a una torre altissima, c'è un grande orologio digitale ben visibile, diviso in 3 riquadri $\boxed{\texttt{hh}}$ $\boxed{\texttt{mm}}$ $\boxed{\texttt{ss}}$. Avendo la possibilità di vedere sempre il grande orologio digitale, i lavoratori sono diventati molto metodici: si svegliano, mangiano e vanno a dormire tutti sempre alla stessa ora.

- Si svegliano, tutti allo stesso momento tra le 7 e le 8; in quel preciso momento, l'orario sul grande orologio mostra tre numeri distinti.
- Iniziano a mangiare il pranzo, tutti nello stesso momento, quando il grande orologio digitale indica un orario che, come numero di 6 cifre, è esattamente il triplo di quello di sveglia; i tre numeri nei riquadri dell'orologio sono gli stessi dell'orario di sveglia, ma chiaramente in una differente disposizione.
- Vanno a dormire, tutti nello stesso momento, quando il grande orologio digitale indica un orario che, come numero di 6 cifre, è esattamente il triplo dell'orario dell'inizio del pranzo; ancora i tre numeri nei riquadri dell'orologio sono gli stessi dell'ora di sveglia (e di pranzo), ma in un'altra disposizione.

Qual è l'orario di sveglia? Si dia la risposta scrivendo i minuti e i secondi.

15. I templi di Magrathea, I

Su Magrathea si sa che nel remoto passato furono costruiti molti templi, rettangolari in onore del sole Soulianis, e circolari in onore dell'altro sole Rahm.
Scavando in una zona archeologica, vengono dissotterrati resti di 9 colonne. Gli archeologi determinano con precisione le posizioni dei loro centri: 7 stanno sul perimetro di un grande rettangolo (100 m per 11.44 m), occupandone i 4 vertici più altri 3 punti; 6 stanno sul perimetro di un rettangolo più piccolo (14.3 m per 6 m), occupandone i 4 vertici più altri 2 punti–necessariamente 4 di questi punti appartengono ad entrambi i perimetri. I due rettangoli non hanno lati paralleli. Inoltre, si osserva che un lato lungo del rettangolo piccolo ha entrambi gli estremi sul perimetro del rettangolo grande, uno sovrapposto ad un vertice, e l'altro no. L'altro lato lungo ha invece entrambi i vertici all'esterno del rettangolo grande.
Gli archeologi cercano di capire se hanno trovato tracce di un tempio circolare dedicato al sole Rahm. Per cercarne traccia con maggiori probabilità di successo, decidono di scavare tutti quei solchi circolari che passino per almeno 4 delle 9 colonne che hanno già trovato.
Una volta identificate le circonferenze che gli archeologi intendono scavare, si conti per ciascuna delle 9 colonne a quante di queste circonferenze appartiene; si dia come risposta la somma del prodotto di quei 9 numeri con la somma di quei 9 numeri.

16. Il costo variabile di un cocktail

Per pagare un Pan Galactic Gargle Blaster al Bistrò Illegale, si prendono 50 dollari altariani, si dividono le 50 monete in due mucchi, si contano le monete di ognuno dei due mucchi e si scrive il prodotto delle due conte. Poi si prende uno dei mucchi con più di una moneta e lo si divide in due mucchi, si contano le monete di ogni mucchio e si scrive il prodotto delle due conte. Si continua finché tutti i mucchi sono di una sola moneta. Si sommano tutti i prodotti. Si paga la somma finale che si ottiene (non 50 dollari altariani). Qual è la somma massima che si può dover pagare?

17. Le monorotaie di Ursa Minor Beta

Sul pianeta Ursa Minor Beta, c'è un lunghissimo rettilineo ferroviario con due monorotaie dove, grazie ad un sofisticato sistema computerizzato, i treni possono viagggiare in entrambe le direzioni su ciascuna monorotaia. Su tutto il rettilineo, non viaggiano mai due treni sulla stessa monorotaia. La distanza tra le due monorotaie è di $1.9\,\mathrm{m}$. I treni viaggiano a velocità costanti e predeterminate: le più comunemente usate per marcia rapida e normale risultano essere, rispettivamente, di $295.4\,\mathrm{km/h}$ e $147.7\,\mathrm{km/h}$, quando trasformate nel sistema metrico decimale. Ogni treno ha in punta una piccola antenna (di dimensioni trascurabili) che, quando necessario, emette un segnale radio. Quando le antenne di due treni sono a distanza inferiore di o uguale a $749.25\,\mathrm{m}$ emettono un segnale radio continuo per segnalare la posizione reciproca. Gli ingegneri ferroviari si sono resi conto che il segnale viene trasmesso per un tempo più lungo quando due treni marciano nello stesso senso rispetto a quando due treni marciano in sensi opposti. Qual è il rapporto tra la durata di trasmissione del segnale tra due treni che viaggiano nello stesso senso, uno in marcia rapida, l'altro in marcia normale, e la durata di trasmissione del segnale tra due treni che viaggiano in sensi opposti, uno in marcia rapida, l'altro in marcia normale? Nella risposta si scriva il rapporto moltiplicato per 100.

18. L'Esercito della Contraddizione Apparente

L'Esercito della Contraddizione Apparente (ECA) di Altair arruola soltanto persone che siano disposte a dire sempre la verità o sempre il falso. Hanno armi potentissime, quasi paradossali, che possono annichilire territori sterminati in un solo, assurdo colpo. Un reggimento di 2009 soldati è composto da sinceri e bugiardi. Un colonnello (non si diventa colonnelli dell'ECA se non si dice sempre la verità) ordina ai 2009 soldati del reggimento di mettersi in rassegna, a rettangolo su 41 file. A quel punto, ogni soldato esclama: «Tra quelli intorno a me, c'è esattamente un bugiardo.»
Il colonnello verifica che i soldati siano perfettamente allineati, che intorno ad ogni soldato ci siano 8 soldati, esclusi quelli sui lati del rettangolo di rassegna. Come controllo definitivo, chiede ai soldati della prima fila di dichiarare quanti bugiardi hanno a fianco nella fila. Ognuno dei soldati della prima fila dichiara: «Di fianco a me, nella prima fila, c'è esattamente un bugiardo.» Tra i 2009 soldati del reggimento dell'ECA, quanti sono sinceri?

19. I templi di Magrathea, II

Tra tutti i solchi circolari che si prevede di scavare nel problema **15.**, il primo che verrà scavato è quello della circonferenza più piccola.
Quanti cm è lungo il diametro di questa circoferenza?

20. La noia di Marvin

Analizzando sé stesso, il robot paranoico Marvin trova, nei recessi dei suoi circuiti digitali, un'operazione $\boxtimes$ tra numeri naturali con le seguenti proprietà:

$$a \boxtimes (a+b) = a \boxtimes b \qquad a \boxtimes b = b \boxtimes a \qquad a \boxtimes 0 = a$$

per numeri naturali a, b qualunque. Per passare il tempo, Marvin calcola il valore di $n \boxtimes 2009$ per tutti gli n da 1 a 2008. Qual è il valore massimo calcolato da Marvin?

21. Il gioco della doppia testa-e-croce
Nelle bettole di Traal, si gioca il gioco della doppia testa-e-croce, con una moneta, tra due squadre di due giocatori. Un giocatore della prima squadra lancia la moneta: se esce croce, è eliminato dal gioco; se esce testa, non succede nulla. Ora, un giocatore dell'altra squadra lancia una moneta: se esce croce, è eliminato; se esce testa, elimina uno dei giocatori della prima squadra. Il gioco passa di nuovo alla prima squadra e si continua come dall'inizio. Perde la squadra che finisce prima i giocatori. Che probabilità ha la prima squadra di vincere? Si dia la risposta scrivendo le prime quattro cifre del risultato diverse da 0,1 e 9, nell'ordine in cui compaiono. (Ad esempio, se il risultato fosse $\frac{5}{7} = 0.714285714\ldots$, si dovrebbe scrivere 7428.)

22. Lo psichiatra paranormale
Per dimostrare ai clienti le sue capacità ultra-psichiatriche, il dottor Gag Halfrunt fa eseguire un facile esperimento al paziente: gli dice di estrarre un certo numero di palline da una scatola che contiene 2009 palline, numerate da 1 a 2009. Lui, parlando al paziente, farà in modo che, tra le palline estratte, ce ne siano almeno due che riportano numeri una il triplo dell'altra. Il fatto è che Gag fa sempre estrarre il minimo numero di palline che gli assicura di ottenere il risultato. Qual è il minimo numero n tale che, presi comunque n palline numerate da 1 a 2009, ce ne siano due tra queste con numeri che siano uno il triplo dell'altro?

23. La tavoletta di cioccolata
Dopo aver bevuto tre Pan Galactic Gargle Blaster, Ford e Zaphod hanno fatto generare al Nutrimatic Food Synthesizer un'enorme tavoletta rettangolare di cioccolata a riquadri: 9002 colonne, ciascuna composta da 2009 riquadri di cioccolato. Decidono di fare un gioco: spalmano di maionese il riquadro in un vertice; poi, a turno, ognuno di loro spezzerà la tavoletta (o quel che ne resta) in due pezzi rettangolari, lungo una delle scanalature tra i riquadri, mangiando una delle due parti. Perde chi mangia il riquadro con la maionese. Ford gioca per primo. Quale rettangolo deve mangiare alla prima mossa per essere certo di vincere? Si indichi nella risposta il numero di riquadri diverso da 2009 e da 9002 di uno dei lati del pezzo di cioccolata che deve mangiare.

24. Il campionato di MCD
I pianeti che partecipano al torneo del campionato galattico di MCD devono iscrivere due squadre al torneo; ogni squadra gioca una e una sola volta contro tutte le squadre degli altri pianeti iscritti, ma non gioca contro l'altra squadra del proprio pianeta. MCD è un gioco molto particolare: quest'anno, prevede che una partita finisca quando il somma dei punti segnati dalle due squadre è 2009, ma con un'importante eccezione. Quando la somma arriva a 2009, se i punteggi delle due squadre hanno massimo comun divisore diverso da 1, il punteggio della squadra in vantaggio viene azzerato e la partita continua. Sapendo che tutte le partite si sono concluse con punteggi diversi (2008-1 e 1-2008 sono considerati punteggi uguali), quante potevano essere al massimo le squadre?

Per saperne di più, si può consultare
la Guida Galattica per AutoStoppisti,
come trascritta da Douglas Adams,
ai cui eredi appartengono i diritti sui personaggi e luoghi menzionati
e alla cui mente vanno ∞ ringraziamenti per l'eccellente trascrizione.

Soluzioni per la Coppa Fermat 2009

Come riportato da osservatori indipendenti, la Guida Galattica per AutoStoppisti non è molto accurata.
Riteniamo comunque opportuno riportare quanto dice riguardo ai problemi che sono stati proposti.
Si sa che quasi tutti sono stati verificati da Deep Thought nei brevi momenti di relax che si è concesso
progettando il computer che avrebbe dovuto determinare l'esatta Domanda Definitiva
sulla Vita, l'Universo e il Tutto la cui risposta si sa essere 42.

Soluzione del problema 1 (La luce sulla cima) Sia $a = 78$, $b = 856$, $c = 6$, $d = 1$, allora $2 \times [b + c - (a + d)] = 2 \times (856 + 6 - 78 - 2) = 1564$ metri.

Soluzione del problema 2 (Il quadro comandi) I punti da cui partono file di 4 pulsanti in diagonale (da NW a SE o da NE a SW) compongono due rettangoli di 5 file di 17 pulsanti. I punti da cui partono file di 4 pulsanti in orizzontale (da W a E) compongono un rettangolo di 8 file di 17 pulsanti. I punti da cui partono file di 4 pulsanti in verticale (da N a S) sono 5 file di 20 pulsanti. In totale, $2 \times (5 \times 17) + 8 \times 17 + 5 \times 20 = 406$

Soluzione del problema 3 (Alla stazione ipergalattica) La media a sportello è

$$\frac{4 + 6 + 9 + 11 + 15 + 36 + 38 + 40 + 45}{3} = 68.$$

La situazione più rapida deve essere almeno di $38 + 36 = 74$ minuti dato che uno dei tre sportelli deve gestire due dei quattro tempi superiori a 30 minuti e può essere effettivamente ottenuta così

sportello 1	sportello 2	sportello 3
45	40	36
15	11	38
6	9	
	4	

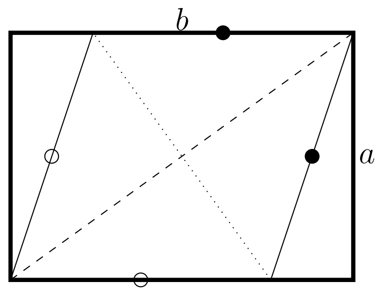
generata dal serpente 45, 40, 36, 38, 11, 15, 9, 4, 6.

Soluzione del problema 4 (Il tempo di Deep Thought) Il volume riempito dopo 2009 anni è $(1 - \frac{1}{8}) = \frac{7}{8}$ del volume totale. Ci vorranno $2009 \times \frac{8}{7} = 2296$ anni.

Soluzione del problema 5 (Il gioco di Trillian e Arthur) Bisogna trovare due coppie di numeri che abbiano lo stesso prodotto, ma la cui somma sia di diversa parità: le uniche possibili sono $(2, 6)$ e $(3, 4)$. Il numero più grande che Giovanni può dire è $12 \times 1 \times 5 \times 7 = 420$.

Soluzione del problema 6 (I tre orologi) F va come un orologio normale; C va a $80\,\mathrm{min/h}$; B va a $20\,\mathrm{min/h}$ dato che impiega 36 ore per fare un giro. B e C segneranno la stessa ora quando $11 + \frac{1}{3}r = 2 + \frac{4}{3}r$, cioè dopo $r = 9\,\mathrm{h}$. F segnerà le 4.

Soluzione del problema 7 (Un problema di estetica, I) Siano $a = 16\,\mathrm{cm}$ e $b = 25\,\mathrm{cm}$. I lati marcati con lo stesso segno sono uguali perché sono stati sovrapposti, la diagonale tratteggiata (che è la piegatura) biseca gli angoli del quadrilatero e due di questi quattro sono alterni interni. Perciò il quadrilatero ha quattro lati uguali ed è un rombo.



L'area ottenuta dopo la piegatura è uguale a quella del rettangolo se si aggiunge metà di quella del rombo.
L'altezza del rombo è il lato corto del rettangolo, il lato si ottiene dalla similitudine tra il triangolo rettangolo che è metà del rettangolo e il triangolo rettangolo che ha il lato come ipotenusa e metà diagonali come cateti:

$$\ell = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} = \frac{a^2+b^2}{2b}.$$

L'area da calcolare è $ab - \frac{a(a^2+b^2)}{4b} = \frac{6476}{25}\,\mathrm{cm}^2 = 259{,}04\,\mathrm{cm}^2$.

Soluzione del problema 8 (Le magliette degli umanoidi) La probabilità di pescarne rosse fino al quarto tentativo è

$$\frac{7}{15}\cdot\frac{6}{14}\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{4}{12} = \frac{1}{39}$$

Perciò la probabilità di pescarne una azzurra è $1 - \frac{1}{39} = \frac{38}{39} = 0,\overline{974358}$.

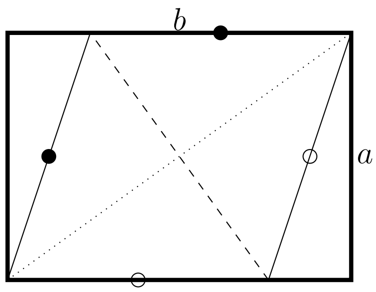
Soluzione del problema 9 (Il soprammobile di Slartibartfast) Siano $d = 120$ e $c = 137$. L'altezza è la somma di un raggio $\frac{d}{2}$, un raggio $\frac{c}{2}$ e dell'altezza della piramide a base quadrata con lato d e spigolo obliquo $\frac{c+d}{2}$. L'altezza è

$$\sqrt{\frac{c^2+2cd+d^2}{4} - \frac{d^2}{2}} = \frac{\sqrt{c^2+2cd-d^2}}{2}.$$

L'altezza totale è $\frac{c+d+\sqrt{c^2+2cd-d^2}}{2} = \frac{137+120+193}{2} = 225\,\mathrm{mm}$.

Soluzione del problema 10 (Il poligono della SCS) Fissati due vertici tra i 33 a formare una corda di base, basta fissare un altro vertice tra metà dei $31-1$ rimanenti (è necessario eliminare il vertice opposto alla corda fissata) per determinare l'altra base parallela alla prima. Con questa procedura si trova ogni trapezio due volte. I trapezi sono dunque $\binom{33}{2}\frac{15}{2} = 33\cdot 8\cdot 15 = 3960$.

Soluzione del problema 11 (Un problema di estetica, II) Siano $a = 16\,\mathrm{cm}$ e $b = 25\,\mathrm{cm}$. I lati marcati con lo stesso segno sono uguali perché sono stati sovrapposti, la diagonale tratteggiata (che è la piegatura) biseca gli angoli del quadrilatero e due di questi quattro sono alterni interni. Perciò il quadrilatero ha quattro lati uguali ed è un rombo.



L'area ottenuta dopo la piegatura è uguale a quella del rettangolo se si aggiunge metà di quella del rombo.
I calcoli sono identici a quelli dell'altro problema con la piegatura.

Soluzione del problema 12 (I litigi su Damogran) Le pratiche sono $\binom{n}{2}$. Iniziando la scomposizione in fattori primi di 438516×2 si trovano tre fattori 2, due fattori 3, un fattore 13 e $2^3\times 3^2\times 13 = 936$ e $438516\times 2 = 936\times 937$. La risposta è 937.

Soluzione del problema 13 (La beneficenza dei neo-matematici) Hanno giocato 27 volte da giovedì 20 marzo 2008 a giovedì 19 marzo 2009. Hanno guadagnato $3\times 3^{27} - 3 = 3^{28} - 3$ dollari.

Dato che $(10a+b)^2 \equiv 20ab + b^2 (\bmod 100)$ e $(10a+b)^3 \equiv 30ab^2 + b^3 (\bmod 100)$, si calcola

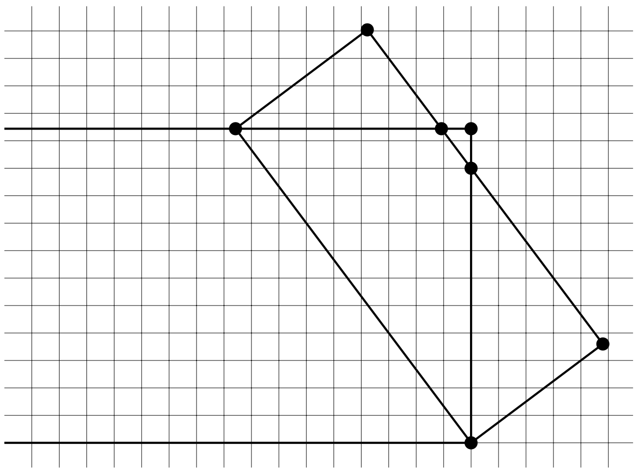
$$\begin{aligned} 3^4 &\equiv 81 (\bmod 100) \\ 3^{12} &\equiv 81^3 \equiv 41 (\bmod 100) \\ 3^{24} &\equiv 41^2 \equiv 81 (\bmod 100) \\ 3^{28} &\equiv 3^4 \cdot 3^{24} \equiv 81^2 \equiv 61 (\bmod 100) \end{aligned}$$

Soluzione del problema 14 (La sveglia su Eadrax) L'ora di pranzo è 21, oppure 22, oppure 23. L'ora in cui vanno a dormire è compresa tra 63 e 71. E' chiaro che, in uno dei due casi, l'ora deve essere l'esatto triplo della precedente; nell'altro aumenta di 1 o 2. I casi possibili sono

07	21	64		07	63	21
07	22	66		07	66	22
07	23	69		07	69	23

Dato che l'orario finale è un multiplo di 9, restano due casi (quelli in terza riga): il primo si esclude subito triplicandolo.

Soluzione del problema 15 (I templi di Magrathea, I) La situazione è la seguente (le due colonne più a sinistra sono fuori figura):



I quattro triangoli rettangoli sono simili. Le coppie contigue dei tre angoli retti insistono sugli stessi archi, generando quaterne di colonne cocircolari: non ce ne sono altri dato che il trapezio in figura non è isoscele e si può verificare che le due colonne fuori figura sono su una sola circonferenza che includa altre due colonne. I solchi da scavare sono 4. Elencando quanti solchi comprendono ciascuna colonna, iniziando da quella in alto a sinistra, ruotando in senso antiorario, si trova: 1, 3, 2, 1, 3, 1, 2, 2, 1. La somma di questi numeri è 16, il prodotto è 72: il risultato è 88.

Soluzione del problema 16 (Il costo variabile di un cocktail) Non ha importanza in che modo si fanno i mucchi. In ogni caso il risultato è $\binom{50}{2} = 1225$. Infatti, per un mucchio di n dollari, il risultato è $\binom{n}{2}$: nel caso di 2 dollari, è 1. Supposto vero per tutti i mucchi con meno di k monete, si facciano due mucchi di ℓ e $k-\ell$ monete. Il loro prodotto, sommato a tutti i successivi è

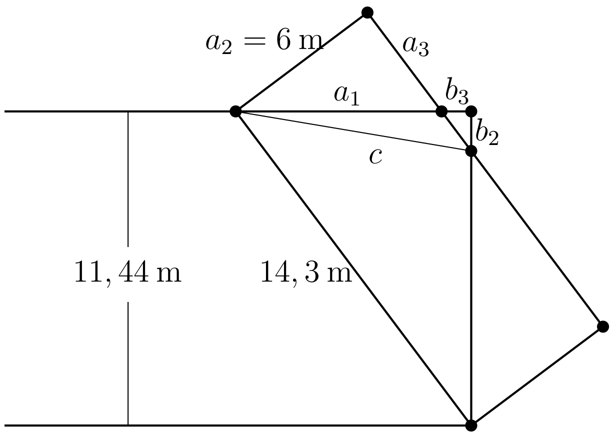
$$\begin{aligned} \ell(k-\ell) + \binom{\ell}{2} + \binom{k-\ell}{2} &= \frac{2\ell(k-\ell) + \ell(\ell-1) + (k-\ell)(k-\ell-1)}{2} \\ &= \frac{\ell(k-1) + (k-\ell)(k-1)}{2} = \frac{k(k-1)}{2} = \binom{k}{2} \end{aligned}$$

Soluzione del problema 17 (Le monorotaie di Ursa Minor Beta) Sia s lo spazio di trasmissione del segnale, siano p e q i tempi in cui due antenne sono vicine per meno di $\frac{s}{2}$ in sensi uguali e in sensi opposti, rispettivamente. Siano v_r e v_n le due velocità. Allora $\frac{s}{p} = v_r - v_n$ e $\frac{s}{q} = v_r + v_n$. Così

$$\frac{p}{q} = \frac{v_r + v_n}{v_r - v_n} = \frac{\frac{v_r}{v_n} + 1}{\frac{v_r}{v_n} - 1} = 3$$

Soluzione del problema 18 (L'Esercito della Contraddizione Apparente) Dal secondo gruppo di affermazioni, segue che ci deve essere un sincero nel reggimento nella prima fila, ma deve avere bugiardi agli estremi. Così consiste di $\frac{48}{3} + 1 = 17$ bugiardi e $49 - 17 = 32$ sinceri. Nei soldati schierati in rassegna, ogni sincero non può avere più di un bugiardo vicino. Risulta così che ogni bugiardo è circondato da sinceri. Le due file dopo la prima sono tutte di sinceri, poi c'è una fila con 17 bugiardi, poi due tutte di sinceri e così via; la penultima fila è con 17 bugiardi, l'ultima è tutta di sinceri. Dato che $2009 = 49 \times (13 \times 3 + 2)$, ci sono 14 file con bugiardi; questi sono $14 \times 17 = 238$. I sinceri sono 1771.

Soluzione del problema 19 (I templi di Magrathea, II) Considerata la figura precedente



si trova che

$$\begin{aligned}
a_1 &= \tfrac{6}{11,44} \times 14,3\,\mathrm{m} = 7,5\,\mathrm{m} \\
a_1 + b_3 &= \sqrt{14,3^2 - 11,44^2}\,\mathrm{m} = 8,58\,\mathrm{m} \\
b_3 &= 8,58\,\mathrm{m} - 7,5\,\mathrm{m} = 1,08\,\mathrm{m} \\
a_3 &= \tfrac{6}{11,44} \times (a_1 + b_3) = 4,5\,\mathrm{m} \\
b_2 &= \tfrac{b_3}{a_3} \times a_2 = 1,44\,\mathrm{m} \\
c &= \sqrt{8,58^2 + 1,44^2}\,\mathrm{m} = 8,7\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

Soluzione del problema 20 (La noia di Marvin) Dati due numeri a e b, diciamo $a \geq b$, sia $a = q \cdot b + r$ con $0 \leq r < b$. Allora

$$a \boxtimes b = b \boxtimes (qb + r) = b \boxtimes ((q-1)b + r) = \ldots = b \boxtimes r.$$

Perciò $a \boxtimes b$ è il massimo comun divisore tra a e b e il numero richiesto è il più grande divisore di 2009, cioè 287.

Soluzione del problema 21 (Il gioco della doppia testa-e-croce) Il gioco termina certamente entro tre turni di coppie di lanci dato che, ad ogni coppia di turni, viene certamente eliminato almeno un giocatore. Si possono schematizzare le eliminazioni possibili ad ogni lancio come segue

lancio	1	2	3	4	5	6
risultato	I 0	I II	I 0	I II	I 0	I II

Le sequenze che danno la vittoria alla prima squadra devono contenere almeno due segni `II` e al massimo un segno `I` *prima del* secondo segno `II`. Se `II` è in seconda e quarta posizione, allora le ultime due posizioni possono contenere qualunque segno, e un *solo* segno `I` può comparire in prima o in terza posizione. Se `II` non è in seconda o in quarta posizione, allora nelle posizioni dispari *deve* comparire il segno `0`. Alla fine, su 64 sequenze possibili, quelle che denotano vittoria per la prima squadra sono $2 \times 2 \times 3 + 2 = 14$.
Perciò la probabilità di vittoria è $\frac{14}{64} = \frac{7}{32} = 0.21875$.

Soluzione del problema 22 (Lo psichiatra paranormale) Cerchiamo il massimo numero m tale che si possano prendere m numeri, nessuno triplo di un altro: si considerino i numeri tra 1 e 2009 scritti nella seguente griglia

$$\begin{array}{rrrrrrr}
1 & 3 & 9 & 27 & 81 & 243 & 729 \\
2 & 6 & 18 & 54 & 162 & 486 & 1458 \\
4 & 12 & 36 & 108 & 324 & 972 & \\
5 & & & \ldots & & 1215 & \\
\vdots & & & & & \vdots & \\
8 & 24 & 72 & 216 & 648 & 1944 & \\
10 & 30 & 90 & 270 & 810 & & \\
11 & & \ldots & & 891 & & \\
\vdots & & & & \vdots & & \\
23 & 69 & 207 & 621 & 1863 & & \\
25 & 75 & 225 & 675 & & & \\
26 & \ldots & & 702 & & & \\
\vdots & & & \vdots & & & \\
74 & 222 & 666 & 1998 & & & \\
76 & 228 & 684 & & & & \\
77 & \ldots & 693 & & & & \\
\vdots & & \vdots & & & & \\
223 & 669 & 2007 & & & & \\
224 & 672 & & & & & \\
226 & 675 & & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & \\
668 & 2004 & & & & & \\
670 & & & & & & \\
\vdots & & & & & & \\
2009 & & & & & &
\end{array}$$

Ogni numero tra 1 e 2009 compare una sola volta nella griglia, e in ciascuna riga compaiono le possibili coppie di numeri, uno il triplo dell'altro. In ciascuna delle prime 2 righe si possono prendere al massimo quattro elementi che non siano uno il triplo di un altro; in ciascuna delle successive $8 - 3 - \lfloor\frac{8-3}{3}\rfloor = 4$ righe si possono prendere al massimo tre elementi (in due modi distinti); in ciascuna delle successive $23 - 9 - \lfloor\frac{23-9}{3}\rfloor = 10$ si possono prendere al massimo tre elementi; in ciascuna delle successive $74 - 24 - \lfloor\frac{74-24}{3}\rfloor = 34$ si possono prendere al massimo due elementi (in due modi distinti); in ciascuna delle $223 - 75 - \lfloor\frac{223-75}{3}\rfloor = 99$ righe ancora successive si prendono due elementi; nel penultimo gruppo di $669 - 224 - \lfloor\frac{669-224}{3}\rfloor = 297$ righe dove si può prendere un singolo elemento (in due modi distinti) e nell'ultimo gruppo di $2009 - 669 - \lfloor\frac{2009-669}{3}\rfloor = 894$ righe dove si prende un singolo elemento. In totale, si possono prendere al massimo

$$2 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 10 \cdot 3 + 34 \cdot 2 + 99 \cdot 2 + 297 + 894 = 1507$$

numeri in cui non compare nessuna coppia di un numero e del suo triplo. Il minimo numero n tale che, comunque presi n numeri tra 1 e 2009, ci sia almeno una coppia di un numero e del suo triplo è 1508.

Soluzione del problema 23 (La tavoletta di cioccolata) La strategia vincente è lasciare all'avversario una tavoletta quadrata: Aldo mangia $9002 - 2009 = 6993$ colonne.

Soluzione del problema 24 (Il campionato di MCD) Se s è il numero di squadre iscritte, allora le partite sono $\frac{1}{2}s(s-2)$ e queste sono la metà di quanti sono i numeri n, compresi tra 1 e 2008, primi con $2009 - n$. Ma questa condizione è la stessa che n sia primo con 2009. Le partite sono perciò $\frac{1}{2} \times 6 \times 7 \times 40$ e le squadre sono 42.

Risposte per la Coppa Fermat

Problema 1:	1564
Problema 2:	0406
Problema 3:	0074
Problema 4:	2296
Problema 5:	0420
Problema 6:	0400
Problema 7:	0259
Problema 8:	7435
Problema 9:	0225
Problema 10:	3960
Problema 11:	0259
Problema 12:	0937
Problema 13:	0058
Problema 14:	6923
Problema 15:	0088
Problema 16:	1225
Problema 17:	0300
Problema 18:	1771
Problema 19:	0870
Problema 20:	0287
Problema 21:	2875
Problema 22:	1508
Problema 23:	6993
Problema 24:	0042