No	titolo	3	4	5	6	7	8	9	Ar.	Alg.	Ge.	Lo.	Co.	Orig.
1	Spettacolo di fine anno	3							X					PR
2	Quanti anni hai?	3	4						X					BB
3	Piega e ripiega	3	4	5					X		X			AO
4	I vasi	3	4	5					X				X	BB+CI
5	In fila	3	4	5								X		PR+CI
6	Il gigante Gargantua		4	5					XX					LU
7	Un triangolo che ingrandisce		4	5	6				X		X			SR+rBB
8	I tre forzieri			5	6				X			X		SR+rBB
9	I compagni di Giuditta			5	6				XX					PR
10	Caleidoscopio I				6	7					XX			AO
11	Il tesoro nella cassaforte				6	7	8		XX			X	X	LU
12	Dadi				6	7	8	9			XX			SI
13	Gli zii di Pierino				6	7	8	9	X		X		X	SI
14	Avventura sul fiume					7	8	9	X					SI
15	Castelli di carta					7	8	9	X	X		X		SI
16	Numeri vincenti					7	8	9	X			X		SI
17	Caleidoscopio II						8	9			XX			AO
18	Croci greche							9			XX			GE
19	Le piramidi di Filippo							9	X	X	X			SI

1. SPETTACOLO DI FINE ANNO (Cat. 3)

Nella classe di Luca ci sono 21 alunni che hanno tutti nomi differenti.

Per lo spettacolo di fine anno, gli alunni che sanno suonare uno strumento musicale o che sanno ballare preparano il balletto. Gli altri alunni della classe, che non sanno né suonare né ballare, preparano una piccola rappresentazione teatrale.

- Gli alunni che sanno suonare uno strumento sono: Giacomo, Laura, Luisa, Luca, Marco, Roberto, Sara, Valentina.
- Gli alunni che sanno ballare sono: Clara, Giulia, Laura, Marta, Roberto, Sara, Valentina.

Quanti alunni preparano il balletto?

Quanti alunni preparano la rappresentazione teatrale?

Spiegate come avete trovato le vostre risposte.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

- Aritmetica: addizione e sottrazione

Analisi del compito

- Leggere l'enunciato, capire la ripartizione degli allievi e, in particolare, che il numero di chi sa ballare è diverso da quello di chi prepara il balletto.
- Stabilire una lista di bambini che sanno suonare uno strumento o che sanno ballare, scrivendo ciascun nome una sola volta (o semplicemente contare i nomi diversi dell'enunciato) per trovare che ci sono 11 bambini che preparano il balletto e che gli altri 10 (21-11) preparano la rappresentazione teatrale.

Oppure: contare gli 8 bambini che suonano uno strumento musicale, i 7 che ballano ed i 4 bambini (Laura, Roberto, Sara e Valentina) che sanno fare entrambe le cose (nella consegna è specificato che tutti i bambini hanno dei nomi diversi) e dedurre così che il numero dei bambini che saranno impegnati nel balletto è 11 (7 + 8 – 4); concludere che il numero dei bambini che saranno impegnati nella rappresentazione teatrale è 10 (21 - 11).

Oppure: aiutarsi con un diagramma (di Eulero-Venn) o con una tabella per visualizzare i bambini che suonano uno strumento, quelli che ballano, quelli che sanno sia suonare che ballare, e gli altri (per le classi che hanno una "tradizione insiemistica").

Livello: 3

Origine: Parma

2. QUANTI ANNI HAI? (Cat. 3, 4)

Giulio, Tommaso e Lino sono tre fratelli. Antonio vorrebbe conoscere la loro età.

Tommaso gli fornisce queste informazioni:

- io ho 7 anni più di Giulio,
- Lino ha 9 anni più di Giulio,
- se sommi le nostre tre età ottieni 40 anni, che è l'età della nostra mamma.

Qual è l'età di ciascuno dei tre fratelli?

Spiegate il vostro ragionamento.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

- Aritmetica: addizione, sottrazione

Analisi del compito

- Comprendere le 3 consegne ed ordinare i bambini per età: Giulio, Tommaso, Lino.
- Scegliere un numero prossimo a 40 che sia divisibile per 3 (per esempio 39), effettuare la divisione e fare l'ipotesi che il risultato sia l'età di Giulio, poi verificare (nell'esempio 13+20+22=55); adattare successivamente i valori numerici, diminuendoli via via.

Oppure: procedere per tentativi, fissando l'età di uno dei personaggi e verificando le consegne ad ogni nuovo tentativo. Scegliere un'età a caso, per esempio 10 anni per Giulio. Dedurre le età degli altri due: 17 anni e 19 anni. Calcolare il totale: 46 anni; notare che è troppo e diminuire l'età di Tommaso con un secondo tentativo, ecc.

Oppure: fare un primo tentativo e dedurre di quanto bisogna modificare ciascuna delle età. Nell'esempio precedente, notare che sono stati conteggiati nel totale 6 anni in più. Dedurre che ogni personaggio ha 2 anni di troppo. Quindi: Giulio 8 anni, Tommaso 15 anni e Lino 17 anni.

Oppure: mediante una rappresentazione con lunghezze (disegni di segmenti) delle età dei tre ragazzi, concludere che la somma delle tre età sarà 3 volte l'età di Giulio + 7 (per Tommaso) + 9 (per Lino) e sottrarre 7 e 9 da 40 per ottenere il triplo dell'età di Giulio; terminare con una divisione per 3.

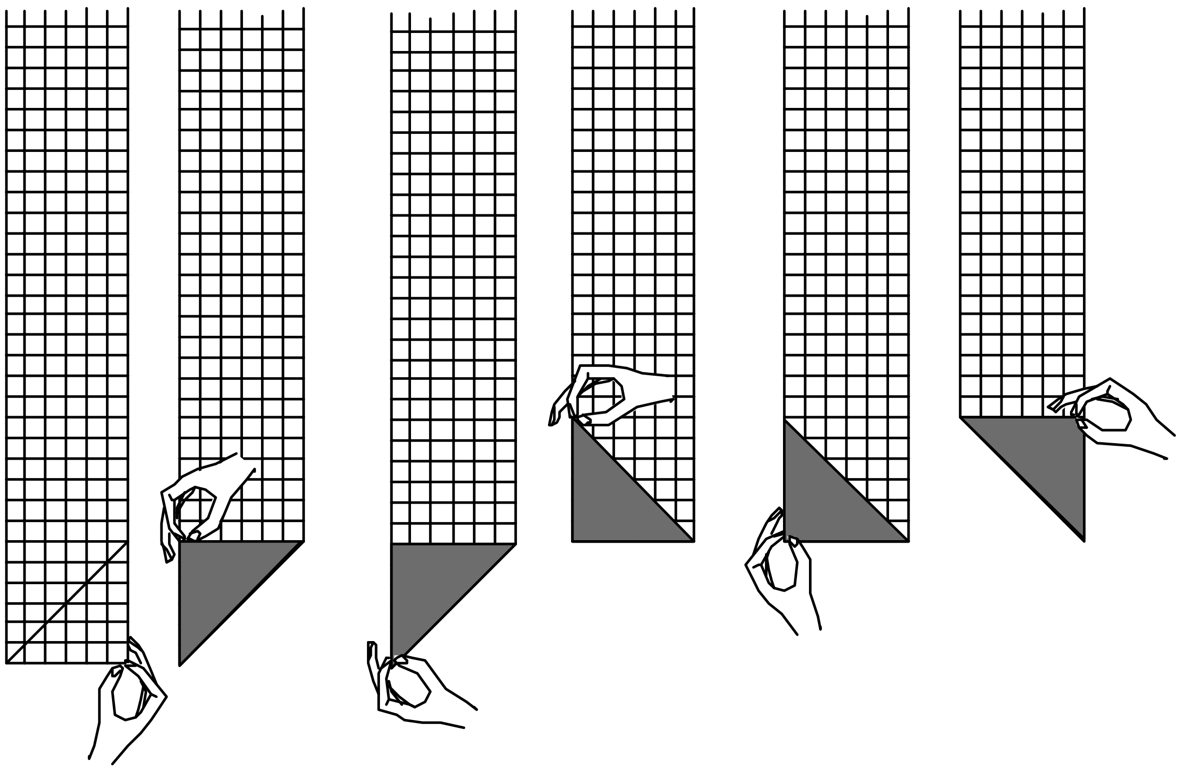
Oppure: sottrarre dalla somma delle età (40) le due differenze 7 e 9 ed arrivare a 24 (40 – 7 – 9 = 24) che è il triplo dell'età di Giulio.

Livello: 3 - 4

Origine: Bourg-en-Bresse

3. PIEGA E RIPIEGA (Cat. 3, 4, 5)

Andrea vuole ottenere tanti triangoli, tutti uguali, ripiegando una striscia di carta quadrettata come vedete nei disegni qui sotto. La striscia di carta ha 70 quadretti lungo un lato e 6 quadretti lungo l'altro.



Quanti triangoli può ottenere Andrea continuando a piegare la striscia?

Spiegate come avete fatto.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

- Geometria: triangoli
- Aritmetica: moltiplicazione o divisione

Analisi del compito

- Comprendere, a partire dal disegno, che i triangoli hanno due lati uguali.
- Riportare su tutta la lunghezza della striscia (ritagliata realmente o disegnata), successivamente, l'uno e l'altro lato del triangolo isoscele e contare i triangoli ottenuti; osservare che ogni due piegature si forma un quadrato.
- Continuare a piegare dei quadrati, contarli e moltiplicare il loro numero per 2 per ottenere il numero dei triangoli; constatare che avanza una parte di striscia.

Oppure: comprendere che si può procedere per via aritmetica, calcolando quante volte il 6 sta nel 70; considerare che ciò corrisponde al numero dei quadrati (11) e che un quadrato è formato da due triangoli; quindi moltiplicare il numero dei quadrati per 2

- Trovare che, con le piegature, si formano 22 triangoli.

Livello: 3 - 4 - 5
Origine: Valle d'Aosta

4. I VASI (Cat. 3, 4, 5)

Di fronte all'annaffiatoio che contiene esattamente 11 litri d'acqua, ci sono sette vasi vuoti, da 1 litro, 2 litri, 3 litri, 4 litri, 5 litri, 6 litri e 7 litri.

Mario deve scegliere alcuni vasi per poter travasare tutta l'acqua del suo annaffiatoio.

I vasi scelti dovranno essere riempiti completamente, ma senza che si versi dell'acqua!

Quali vasi può scegliere Mario?

Per esempio, se Mario sceglie i vasi 3, 4 e 6, non avrà abbastanza acqua per riempirli tutti.

Se sceglie i vasi 6 e 2, non riuscirà a svuotare completamente il suo annaffiatoio.

Se sceglie invece i vasi 3, 6 e 2 potrà svuotare completamente l'annaffiatoio e riempire completamente i vasi.

Ma ci sono ancora altre possibilità. Indicatele tutte e spiegate come le avete ottenute.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

- Aritmetica: addizione (di numeri piccoli)
- Combinatoria

Analisi del compito

- Capire che le possibilità di scelta comportano un numero variabile di vasi.
- Passare al dominio numerico per organizzare la ricerca che consiste nello scomporre il numero 11 in somma di termini da 1 a 7; rendersi conto che l'ordine dei termini non importa e fare attenzione a non considerare due volte la stessa somma con gli stessi numeri.
- Trovare le possibilità organizzando la ricerca, per esempio scrivendo sistematicamente le addizioni, ordinando i loro termini:

  se il più grande dei numeri è il 7, la somma 11 è ottenuta in due modi: 7+4 e 7+3+1;

  se il più grande dei numeri è il 6, la somma 11 è ottenuta in tre modi: 6+5, 6+4+1 e 6+3+2;

  se il più grande dei numeri è il 5, la somma 11 è ottenuta in due modi: 5+4+2 e 5+3+2+1;

  se il più grande dei numeri è il 4, la somma 11 non si può ottenere perché 4+3+2+1 =10 è inferiore a 11.

  Mario ha, quindi, in tutto 7 possibilità per riempire i suoi vasi.

Oppure: trovare le possibilità con numerosi tentativi non organizzati, eliminando le possibilità uguali.

Livello: 3 - 4 - 5
Origine: Bourg-en-Bresse + C.I.

5. IN FILA (Cat. 3, 4, 5)

Sette bambini camminano uno dietro l'altro lungo un sentiero molto stretto e alcuni si tengono per mano.

- Ci sono due bambini fra Carlo e Daniela;
- Emilio, il più giovane, dà la mano a Daniela e a Francesca;
- c'è lo stesso numero di bambini sia davanti che dietro a Benedetta;
- Giorgio è uno dei bambini della fila che sono davanti ad Andrea.

Indicate in quale ordine i sette bambini possono essere disposti nella fila.

Spiegate il vostro ragionamento.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

- Logica: relazione d'ordine

Analisi del compito

- Leggere l'enunciato e utilizzare, eventualmente, le iniziali dei nomi dei sette bambini A, B, C, D, E, F, G per indicarli. Capire che B è in quarta posizione, poi scegliere un modo per rappresentare la situazione al fine di organizzare la ricerca: disegni, liste, nomi scritti su strisce di carta per poterli spostare…
- Dedurre, dalla seconda informazione, che D, E ed F si susseguono, in quest'ordine o nell'ordine inverso, e che sono tutti e tre davanti a B o dietro a B, cosa che porta a quattro possibilità per la sistemazione di questi tre bambini
- Oppure dedurre, dalla prima informazione, che B, essendo in quarta posizione, non può essere che tra C e D e che ci sono quattro possibilità per sistemare questi due bambini
- Combinare le due informazioni per constatare che restano solo due possibilità per sistemare B, C, D, E e F:

  F; E; D; B; …; C; …   oppure   …; C; …; B; D; E; F
- Utilizzare la quarta informazione per sistemare A e G nelle due posizioni rimanenti per ciascuna delle due precedenti possibilità: F; E; D; B; G; C; A oppure G; C; A; B; D; E; F (da leggere nel senso di 1°, 2°, 3°, 4°, 5°, 6°, 7°)
- Oppure lavorare per tentativi successivi, con ipotesi e verifiche .

Livello: 3 - 4 - 5

Origine: Parma + C.I.

6. IL GIGANTE GARGANTUA (Cat. 4, 5)

Gargantua vuole essere ammesso alla scuola dei giganti. La condizione per essere ammessi è avere una barba di almeno 80 cm di lunghezza di primo mattino.

In 24 ore la barba di Gargantua cresce, in modo regolare, allungandosi di 5 cm. Per impedire che Gargantua sia ammesso troppo presto alla scuola, sua moglie gli accorcia la barba di 2 cm ogni notte.

Questa mattina, Gargantua ha una barba di 15 cm.

Tra quanti giorni Gargantua sarà ammesso alla scuola dei giganti?

Spiegate il vostro ragionamento.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

- Aritmetica

Analisi del compito

- Riconoscere che c'è una «sovrapposizione» di allungamenti e accorciamenti della barba che possono tradursi in un aumento di 3 cm da un mattino al mattino successivo.
- Comprendere che il numero di giorni cercato corrisponde al numero di volte che si deve aggiungere 3 a 15 per oltrepassare 80 (per es., calcolare: 80-15=65 poi 65:3=21,66…) e concludere che Gargantua dovrà attendere 22 giorni.

Oppure: annotare, giorno per giorno, la lunghezza della barba

giorni (mattino)	0		1		2		3		4		5	…		20		21		22
lunghezza	15	20	18	23	21	26	24	29	27	32	30	…	77	75	80	78	83	81

Oppure: dopo aver compreso che l'allungamento da un mattino al successivo è di 3 cm, procedere con una divisione (80:3=26,66…) per dedurre che occorreranno 27 giorni; calcolare il numero dei giorni (5) che gli saranno occorsi per arrivare a 15 cm (15:3 = 5) e infine sottrarre: 27-5=22.

Livello: 4 - 5

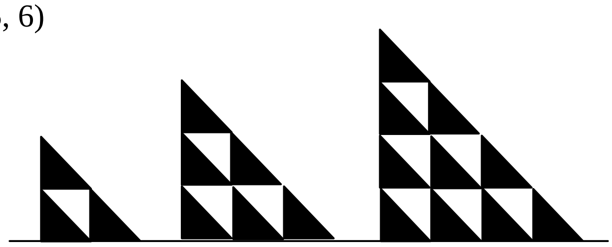
Origine: Luxembourg

7. UN TRIANGOLO CHE INGRANDISCE (Cat. 4, 5, 6)

Per costruire la figura a due piani (a), si utilizzano 3 triangoli neri e 1 triangolo bianco.

Per costruire la figura a tre piani (b), si utilizzano 6 triangoli neri e 3 triangoli bianchi.

Per costruire la figura a quattro piani (c), si utilizzano 10 triangoli neri e 6 triangoli bianchi.



Rolando ha costruito una figura molto grande con ancora più piani utilizzando esattamente 55 triangoli neri.

Di quanti piani si compone questa figura?

Quanti triangoli bianchi ha utilizzato Rolando per costruirla?

Spiegate il vostro ragionamento.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

- Aritmetica: addizione, moltiplicazione, sottrazione
- Geometria

Analisi del compito

- Capire che ogni figura ha un piano in più della precedente e provare a disegnare le figure successive servendosi della quadrettatura del foglio.
- Comprendere la costruzione geometrica dei piani successivi.
- Contare i triangoli neri fino ad arrivare a 55. Ricavare il numero dei piani e contare i triangoli bianchi che ha utilizzato Rolando.

Oppure, per evitare il disegno lavorare nel dominio numerico e tenere una lista precisa del conteggio dei triangoli neri per determinare il numero dei piani, per esempio:

numero dei triangoli neri:	3	6	10	15	21	28	36	45	55
numero dei piani:	2	3	4	5	6	7	8	9	10

E’ possibile ottenere la lista precedente, comprendendo la regolarità della sua costruzione:

sia notando che si passa da un numero di triangoli neri al successivo aggiungendo 3, poi 4, poi 5, ..., poi 9;

sia notando che il numero di triangoli neri della figura a n piani si ottiene aggiungendo n al numero dei triangoli neri della figura precedente (quella a n-1 piani).

- Rendersi conto che si può aggiungere alla lista del conteggio dei triangoli neri una lista opportunamente coordinata del conteggio dei triangoli bianchi, per esempio:

numero dei triangoli neri:	3	6	10	15	21	...	55
numero dei piani:	2	3	4	5	6	...	10
numero dei triangoli bianchi:	1	3	6	10	15	...	45

Per l’ultima lista si può notare sia che si trovano gli stessi numeri della lista del conteggio dei triangoli neri con uno “spostamento” verso destra di ciascuno di tali numeri, sia che si passa da un numero di triangoli bianchi al successivo aggiungendo 2, poi 3, poi 4, ..., poi 8.

Oppure: constatare che il numero di triangoli neri corrisponde alla somma dei numeri naturali fino ad n (n = numero dei piani) e che il numero dei triangoli bianchi corrisponde alla somma dei numeri naturali fino ad n-1 (n = numero dei piani) o che è uguale al numero dei triangoli neri meno n.

Oppure: constatare che il numero totale dei triangoli è 1,4,9,16,..(successione dei quadrati) e calcolare il numero di triangoli bianchi per differenza

Livello: 4 - 5 - 6

Origine: Suisse romande, incontro di Bourg-en-Bresse

8. I TRE FORZIERI (Cat. 5, 6)

Il contenuto di ciascuno di questi tre forzieri ha lo stesso valore di 30 pezzi d’oro.

In ogni forziere ci sono solo lingotti.

Nel primo forziere ci sono 4 lingotti piccoli ed 1 lingotto medio.

Nel secondo forziere ci sono 2 lingotti piccoli e 2 lingotti medi.

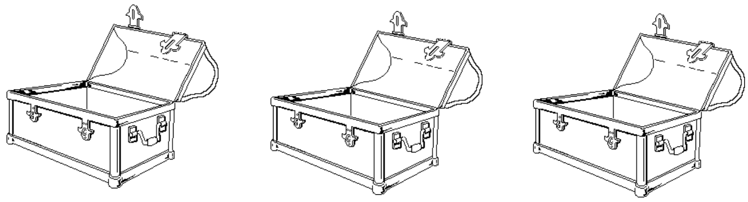
Nel terzo forziere ci sono 1 lingotto medio ed 1 lingotto grande.

Quanti pezzi d’oro vale un lingotto piccolo?

Quanti pezzi d’oro vale un lingotto medio?

Quanti pezzi d’oro vale un lingotto grande?

Spiegate come avete trovato le vostre risposte.



ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

- Aritmetica: scambi, equivalenze, proporzionalità
- Logica

Analisi del compito

- Rendersi conto che, essendo il valore del contenuto di ogni forziere di 30 pezzi d’oro, i forzieri sono equivalenti fra loro, sebbene contengano lingotti diversi sia per numero che per grandezza.
- Ricavare dall’equivalenza fra i contenuti dei primi due forzieri 4p +1m = 2p + 2m (p rappresenta il valore di un lingotto piccolo, m quello di un lingotto medio) l’equivalenza più semplice 2p + 1m = 2m (eliminando 2 lingotti piccoli da ogni forziere) e quindi l’equivalenza ancora più semplice 2p = 1m (eliminando ancora un lingotto medio da ogni forziere). Nello stesso modo, ricavare dall’equivalenza tra i contenuti del primo e del terzo forziere 4p+1m=1m+1g (g rappresenta il valore di un lingotto grande) l’equivalenza più semplice 4p = 1g.

  Si può quindi ottenere dalle relazioni 2p = 1m e 4p = 1g, per sostituzione, la relazione 1g = 2m.
- Con l’aiuto delle relazioni precedenti, considerare che il contenuto di ciascun forziere può esprimersi, dopo le sostituzioni, per mezzo di un solo tipo di lingotto; per es., rispetto ai lingotti piccoli:

  contenuto del primo forziere: 4p+1m = 4p+2p = 6p;

  contenuto del secondo forziere: 2p+2m = 2p+2x2p = 2p+4p = 6p;

  contenuto del terzo: 1m+1g = 2p+4p = 6p,

  Ciò permette di esprimere la «misura» di ciascun lingotto in pezzi d’oro: poiché 6 lingotti piccoli valgono 30 pezzi d’oro, un lingotto piccolo vale 5 pezzi d’oro (30 : 6 = 5), un lingotto medio vale 10 (=5x2) pezzi d’oro e un lingotto grande vale 20 (=5x4) pezzi d’oro.

Oppure: procedere per tentativi, a caso od organizzati. Per esempio, a partire dal contenuto del terzo forziere, ipotizzare m = 12 e g=18, ciò che conduce ad una contraddizione quando si verificano tali valori per i contenuti degli altri due forzieri. Provare poi, cosa che può apparire più naturale, i valori m = 10 e g = 20 che permettono di trovare p = 5 considerando il contenuto del secondo forziere e verificare poi questi valori per il contenuto del primo forziere.

Oppure: lavorare con rappresentazioni grafiche dei lingotti e delle equivalenze che facilitano l’applicazione delle regole d’equivalenza (per es., bilance da equilibrare).

Livello: 5 - 6

Origine: Suisse romande, incontro di Bourg-en-Bresse

9. I COMPAGNI DI GIUDITTA (Cat. 5, 6)

Giuditta ha notato che, nella sua classe, ci sono alcuni alunni che hanno i capelli neri e gli occhi azzurri. Poiché Giuditta è curiosa di natura, si mette ad osservare tutti gli alunni delle quattro classi della sua scuola.

Dopo qualche giorno, scopre che:

- la metà degli alunni sono maschi
- un terzo degli alunni hanno i capelli neri
- dividendo il numero degli alunni della scuola per 7, si trova il numero degli alunni che hanno gli occhi azzurri,
- in ciascuna classe, ci sono almeno 20 alunni ma non più di 30.

Quanti sono gli alunni delle classi osservate da Giuditta che non hanno gli occhi azzurri?

Spiegate come avete trovato la vostra soluzione.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

- Aritmetica: frazioni, multipli, divisibilità, confronto di numeri

Analisi del compito

- Capire che il numero degli studenti deve essere un multiplo di 2, di 7 e di 3 e quindi di 42 che è il loro m.c.m.: 42, 84, 126, 168,….
- Esaminare i numeri precedenti (multipli) in rapporto ai valori 80 (20x4) e 120 (30x4), che sono il minimo e il massimo possibili di allievi
- Concludere che gli studenti osservati sono in tutto 84, e che quindi 84 – (1/7) 84 = 72 (oppure (6/7) 84) è il numero degli allievi che non hanno gli occhi azzurri.

Oppure (per gli allievi che non conoscono il m.c.m.)

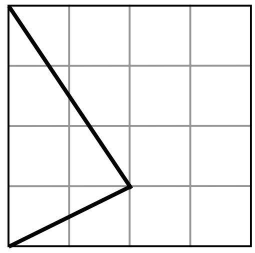
- Situare il numero degli alunni tra 80 e 120 (secondo l'ultima indicazione), poi cercare in questo intervallo numeri che sono divisibili per 7 (a partire da 70 o 77: 84, 91, 98, 105, 112 e 119), eliminare quindi i dispari (restano solo 84, 98 e 112) e trovare che 84 è il solo numero ancora in lista che è divisibile per 3.
- Calcolare come in precedenza il numero degli allievi che hanno gli occhi azzurri: 84 : 7 = 12 e sottrarre questo risultato da 84 per conoscere il numero degli allievi che non hanno gli occhi azzurri.

Livello: 5 - 6

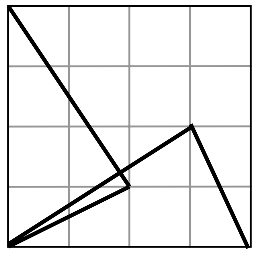
Origine: Parma

10. CALEIDOSCOPIO I (Cat. 6, 7)

Si hanno a disposizione 2 tessere quadrate trasparenti. Su ciascuna di esse sono disegnati, come mostra la figura qui a fianco, una quadrettatura ed un triangolo (che si vedono da una parte e dall'altra per la trasparenza della tessera).



Se si sovrappongono le 2 tessere facendo coincidere perfettamente i bordi, si può ottenere, ad esempio, questa figura che non ha assi di simmetria:



Sovrapponendo ancora perfettamente le 2 tessere, quante figure diverse, ma con un asse di simmetria, si possono ottenere?

Disegnate tutte le figure diverse, con un asse di simmetria, che avete trovato.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

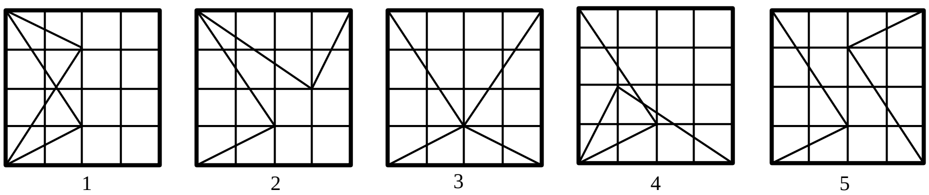
- Geometria: simmetrie e rotazioni

Analisi del compito

- Costruire le due tessere su carta trasparente o anche su carta quadrettata (avendo l'accortezza in quest'ultimo caso di visualizzare, con ricalco, il triangolo anche sul retro delle tessere).

Oppure:

- disegnare su dei quadrati le figure ottenute per rotazione o ribaltamento di uno dei due triangoli e verificare se le figure ottenute possiedono un asse di simmetria.
- Scoprire le 4 figure con un asse di simmetria (1, 2, 3, 4), ottenute per ribaltamento di uno dei due triangoli. Si noti che bisogna scartare la figura 5 perché ha simmetria centrale ma non assiale

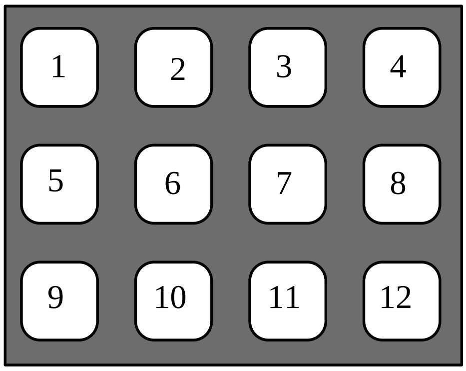


Livello: 6 - 7

Origine: Aosta

11. IL TESORO NELLA CASSAFORTE (Cat. 6, 7, 8)

L'apertura di una cassaforte è comandata da una tastiera come quella rappresentata nella figura qui accanto. Premendo i tasti numerati, i numeri corrispondenti vengono addizionati e quando si ottiene la somma 21 la cassaforte si apre e appare il tesoro.



Ma attenzione! Si deve ottenere esattamente 21, né più né meno. Non ha importanza l'ordine in cui vengono toccati i tasti e uno stesso tasto può essere premuto più di una volta.

Rita vorrebbe aprire la cassaforte premendo esattamente 8 tasti, ma senza mai toccare quello con il numero 1.

In quanti modi Rita può aprire la cassaforte?

Indicate tutte le possibilità e spiegate come avete ragionato.

ANALISI A PRIORI

Ambio concettuale

- Aritmetica: addizione di numeri naturali
- Logica
- Combinatoria

Analisi del compito

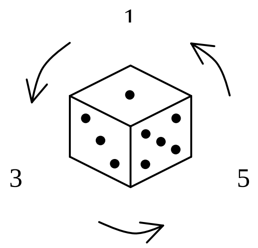
- Comprendere che la somma 21 addizionando 8 numeri può essere ottenuta solo se la maggior parte dei numeri sono «piccoli» (e diversi da 1)
- Comprendere che non si possono avere soluzioni se il più piccolo numero è un 3 (o un numero più grande): infatti si avrebbe $S \geq 8 \cdot 3 > 21$
- Si può tentare di raggruppare le soluzioni in base al numero di volte che Rita preme il tasto 2. Ci sono 7 soluzioni:
  7x2+7 6x2+3+6 6x2+4+5 5x2+3+3+5 5x2+4+4+3 4x2+3+3+3+4 3x2+3+3+3+3+3

Livello: 6 - 7 - 8
Origine: Luxembourg

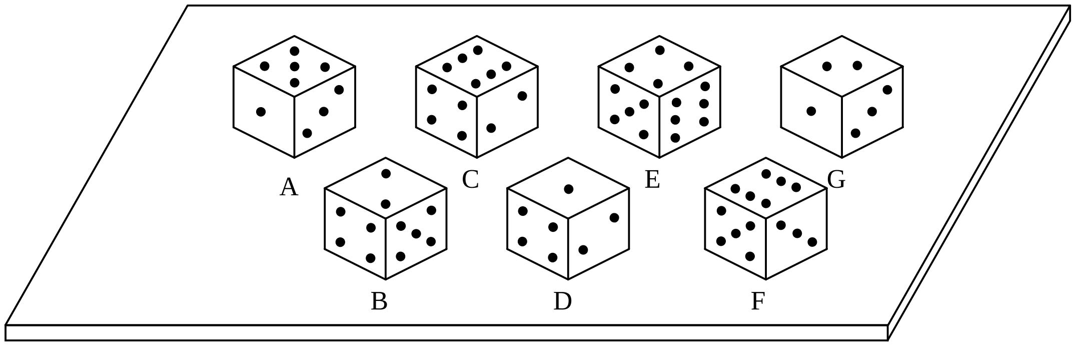
12. DADI (Cat. 6, 7, 8, 9)

Un dado (di tipo «occidentale») è costruito correttamente se sono rispettate le seguenti regole:

- la somma dei numeri su ogni coppia di facce opposte del dado è sempre 7;
- se si guarda il dado in modo da vedere le tre facce corrispondenti ai numeri dispari, si nota che l'"uno", il "tre" e il "cinque" si succedono in senso antiorario.



La figura seguente mostra sette dadi appoggiati su un tavolo. Fra di essi sono stati inseriti tre dadi "irregolari".



Individuate questi tre dadi e spiegate in cosa consiste la loro irregolarità.

Indicate come avete proceduto.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

- Geometria: capacità di visualizzazione spaziale; versi di rotazione orario e antiorario; cubo e sue proprietà

Analisi del compito

- Comprendere le regole per la costruzione corretta di un dado e procedere al loro controllo sui dadi in figura.
- Rendersi conto che i dadi da scartare sono: il dado B perché i numeri su due facce consecutive danno per somma 7; il dado C perché sulle facce "pari" i numeri 2, 4, 6 (opposti a 5, 3, 1) si susseguono in senso orario; il dado G perché, dovendo esserci "cinque" sulla faccia a contatto con il tavolo, le tre facce "dispari", 1, 3, 5, si succederebbero in senso orario. Gli altri dadi, A, D, E, F, sono quindi regolari.
- L'eventuale uso di un dado, direttamente disponibile o costruito a partire dallo sviluppo piano di un cubo e completato con la "numerazione" corretta delle sue facce, può servire a verificare che le configurazioni A, D, E, F sono possibili; occorre poi procedere come sopra per giustificare che le configurazioni B, C, G sono irregolari.

Livello: 6 - 7 - 8 - 9
Origine: Siena

13. GLI ZII DI PIERINO (Cat. 6, 7, 8, 9)

Pierino decide di fare visita ai suoi tre zii Antonio, Bruno e Carlo.

Egli sa che:

- la casa dello zio Antonio è a 20 minuti da casa sua, a 40 minuti da quella dello zio Bruno e a 35 minuti da quella dello zio Carlo
- la casa dello zio Bruno è a 25 minuti da casa sua e a 45 minuti da quella dello zio Carlo
- la casa dello zio Carlo è a 50 minuti da casa sua.

Pierino vuole partire da casa, far visita ai tre zii e rientrare a casa, impiegando complessivamente il minor tempo possibile per gli spostamenti.

In quale ordine gli converrà far visita agli zii?

Quanto tempo impiegherà in tutto per i suoi spostamenti?

Indicate le soluzioni possibili e spiegate come avete ragionato.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

- Aritmetica: addizioni
- Geometria: orientamento, percorsi, grafi
- Combinatoria

Analisi del compito:

- Fare un disegno (ad es., un grafo “etichettato”) in cui siano indicate le case degli zii e quella di Pierino (A, B, C, P), i collegamenti ed il tempo necessario per ogni collegamento; risalire dal disegno ai possibili modi di effettuare le visite, indicando, di volta in volta, gli spostamenti (6):PA-AB-BC-CP, PA-AC-CB-BP, PB-BA-AC-CP, PB-BC-CA-AP, PC-CA-AB-BP, PC-CB-BA-AP.

Oppure: attraverso le permutazioni dei tre elementi A, B, C, determinare le 6 possibilità ottenute elencando, nell’ordine, le case visitate (tenere presente che ogni volta si comincia da P e si torna in P): PABCP, PACBP, PBACP, PBCAP, PCABP, PCBAP

- Trovare le possibilità elencate al punto precedente, utilizzando un diagramma ad albero con punto di partenza P (casa di Pierino) e che porti indicato su ogni tratto di collegamento da una casa all’altra la durata del percorso
- Per ogni possibilità determinare il tempo totale sommando i tempi occorrenti su ogni tratto
- Arrivare alla conclusione che Pierino ha due modi diversi di effettuare la visita agli zii che richiedono entrambi il minor tempo, 125 minuti, per gli spostamenti in senso inverso l’uno dell’altro: PACBP, PBCAP. (Le altre durate sono 155=20+40+45+50 per PABCP e PCBAP, e 150=25+40+35+50 per PBACP e PCABP.)

Livello: 6 -7 - 8 - 9

Origine: Siena

14. AVVENTURA SUL FIUME (Cat. 7, 8, 9)

Durante un'escursione in montagna, una comitiva di turisti ha dovuto attraversare un fiume in un punto in cui era possibile passare da una sponda all'altra, saltando successivamente su 15 grosse pietre.

L'intera comitiva ha attraversato il fiume in 3 minuti nel modo seguente:

- il primo turista è saltato sulla prima pietra, poi quando è passato sulla seconda, il secondo turista è saltato sulla prima pietra;
- quando il primo turista è passato sulla terza pietra, il secondo è saltato sulla seconda pietra ed il terzo sulla prima;
- così di seguito, uno dopo l'altro, in fila, ogni turista della comitiva è saltato sulle 15 pietre con lo stesso ritmo di un salto ogni 2 secondi.

Quanti erano i turisti della comitiva?

Spiegate il vostro ragionamento.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

Aritmetica

Analisi del compito

- Capire che con 15 pietre si avranno 16 salti, uno ogni 2 secondi
- Capire che dopo 32 secondi (16x2) il primo turista arriva sulla sponda opposta e che, di seguito, ogni 2 secondi arrivano gli altri
- Tenere presente che dopo 3 min (180 sec) anche l'ultimo turista arriva sulla sponda opposta
- Procedere empiricamente annotando il tempo di arrivo di ciascun turista fino a 180 sec.:

32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46 , 48, 50,…………..178,180 (sono 75)

Oppure, trovare direttamente il risultato con il calcolo del numero dei multipli di 2 tra 32 e 180: (180-32)/2 + 1

Oppure, pensare che a partire da 30 secondi (quando il primo è sull'ultima pietra) ci sarà un arrivo sulla sponda opposta ogni 2 secondi, e procedere con il calcolo corrispondente: (180-30)/2 = 2

Oppure, costruire una tabella di questo tipo:

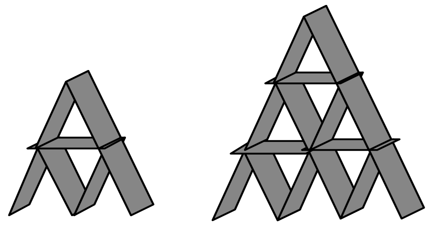
Numero persone	1	2	3	…	10	20	30	40	50	60	70	80
Tempo impiegato (in secondi)	32	34	36	…	50	70	90	110	130	150	170	190

dedurre che 180 secondi è a metà tra 170 e 190 e che quindi il numero corrispondente delle persone sarà a metà tra 70 e 80, e cioè 75.

Livello: 7 - 8 - 9
Origine: Siena

15. CASTELLI DI CARTA (Cat. 7, 8, 9)

Andrea si diverte a costruire castelli con le carte da gioco. Ha costruito questi due castelli: il primo ha due piani ed è fatto con 7 carte; il secondo ha tre piani ed è fatto con 15 carte.



Per costruire un castello di 25 piani, quante carte dovrebbe utilizzare Andrea?

Spiegate il vostro ragionamento.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

- Aritmetica: addizioni e moltiplicazioni
- Logica: capacità di deduzione e astrazione
- Algebra

Analisi del compito:

- Capire la regola di costruzione dei castelli di carte e come si passa da un castello al successivo avente un piano in più
- Dopo aver disegnato i primi castelli, passare al registro numerico e stabilire una corrispondenza tra il numero dei piani e il numero delle carte, del tipo:

piani	1	2	3	4	5	6	7	8	9.. ………25
carte	2	7	15	26	40	57	………		

e comprendere che per passare da un castello all'altro si aggiungono successivamente numeri ciascuno dei quali vale sempre 3 di più del precedente:

+ 5   + 8   + 11   +14   +17   +20   +23   +26……

Giungere fino al castello di 25 piani, scrivendo tutti i risultati intermedi (eventualmente con l'aiuto della calcolatrice)

carte   2   7   15   26   40   57   77   100   126……….**950**

Oppure cercare un legame funzionale tra il numero dei piani e il numero delle carte di un castello. Per esempio:

- Notare che, nel primo castello, il piano 1 (quello più alto) è formato da 3 (=3·1) carte (un triangolo completo) mentre il piano 2, di base, è formato da 4 (= 3·2-2) carte (due triangoli privati dei lati di base); nel secondo castello, il piano 1 è formato da 3 (= 3·1) carte (un triangolo completo), il piano 2 è formato da 6 (= 3·2) carte (due triangoli completi), il piano 3 di base è formato da 6 (= 3·3-3) carte (tre triangoli senza i lati di base). Provare a disegnare castelli più alti e scoprire che la regola che fornisce il numero di carte sul piano n è: $3n$ se n non è il piano di base del castello, $3n-n=2n$ se n è il piano di base del castello. Giungere così a stabilire che per costruire un castello di n piani occorrono $3(1+2+3+……n-1)+2n$ carte.
- O ancora: osservare che il numero di "triangoli" individuabili in un castello di n piani è n^2 e che quindi il numero dei lati dei triangoli è $3n^2$. Considerare poi che ogni lato, a parte quelli esterni, è contato due volte e che i triangoli sulla base non sono completi e concludere che il doppio del numero di carte necessario per costruire un castello di n piani è dato da $(3n^2 + 2n – n)$ e che quindi $(3n^2 + n)/2$ è il numero di carte di un castello di n piani.

Oppure: osservare che per un castello di n piani occorrono $(1+2+3+…..+n)2$ carte "oblique" e $(1+2+3+….+n-1)$ carte "orizzontali". Quindi, in tutto, $n(n+1)+(n-1)n/2 = (3n^2 + n)/2$

- Concludere che per un castello di 25 piani occorrerebbero 950 carte.

Livello: 7 - 8 - 9

Origine: Siena

16. NUMERI VINCENTI (Cat.7, 8, 9)

Luigi organizza una “pesca di beneficenza”: prepara 2000 biglietti, numerati da 1 a 2000, li ripiega in modo che il numero non si veda, e li deposita in un cesto. Pagando 1 euro si ha diritto a pescare un biglietto.

- I numeri vincenti sono quelli formati da 2, 3 o 4 cifre consecutive in ordine crescente (per esempio 45 e 234 sono numeri vincenti mentre 54 e 457 non lo sono).
- Un numero vincente è premiato con 10 euro.

Quanti biglietti devono essere pescati, al minimo, perché Luigi sia sicuro di non rimetterci denaro?

Spiegate la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

- Aritmetica: differenza tra cifra e numero, numerazione, operazioni
- Logica: ragionamento, conteggi organizzati

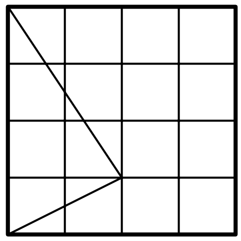
Analisi del compito

- Rendersi conto che dei 2000 numeri solo 16 sono numeri vincenti; si può facilmente contarli, elencandoli (12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, 123, 234, 345, 456, 567, 678, 789, 1234) oppure facendo considerazioni sulla struttura di tali numeri (con due cifre a partire da 12 ce n’è uno per decina fino a 89, con tre cifre a partire da 123 ce n’è uno per centinaio fino a 789 ed infine con quattro cifre c’è solo 1234).
- Capire che 160 euro è la somma totale da pagare per i numeri vincenti (16x10) e che devono essere pescati 160 biglietti per recuperare questa somma.
- Concludere che devono essere pescati almeno 160 biglietti perché Luigi sia sicuro di non rimetterci: nella peggiore delle ipotesi, infatti, i 16 numeri vincenti si potrebbero trovare nei primi 160 biglietti pescati.

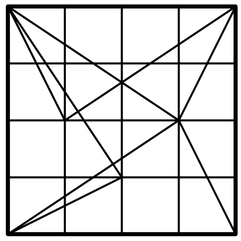
Livello: 7 - 8 - 9
Origine: Siena

17. CALEIDOSCOPIO II (Cat. 8, 9)

Si hanno a disposizione 4 tessere quadrate trasparenti. Su ciascuna di esse sono disegnati, come mostra la figura qui a fianco, una quadrettatura ed un triangolo (che si vedono da una parte e dall’altra per la trasparenza della tessera).



Se si sovrappongono perfettamente le quattro tessere facendo coincidere i bordi, in modo che nessuno dei quattro triangoli coincida con gli altri, si può ad esempio ottenere la figura qui a fianco, che non ha assi di simmetria.



Sovrapponendo ancora le 4 tessere, quante figure diverse, composte da quattro triangoli distinti, e con almeno un asse di simmetria si possono ottenere?

Disegnate tutte le figure diverse che avete trovato, con quattro triangoli distinti e almeno un asse di simmetria.

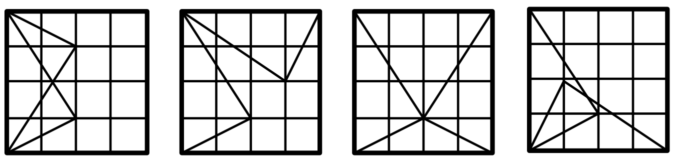
ANALISI PRIORI

Campo concettuale

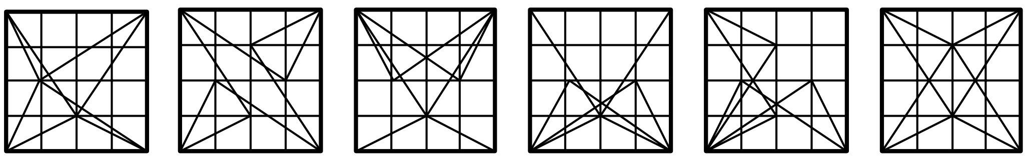
- Geometria: simmetrie e rotazioni

Analisi del compito

- Costruire le quattro tessere su carta trasparente o anche su carta quadrettata (avendo l’accortezza in quest’ultimo caso di visualizzare, con ricalco, il triangolo anche sul retro della tessere) e cercare le soluzioni possibili dandosi un metodo (per es., tenere ferme due tessere, simmetriche fra loro, e provare a sistemare le altre due in modo ancora simmetrico)
- Oppure trovare le figure richieste, per esempio, disegnando prima su un quadrato le figure simmetriche diverse che si ottengono dalla sovrapposizione di due tessere



e, successivamente, disegnando le simmetriche di queste ancora rispetto agli assi di simmetria del quadrato



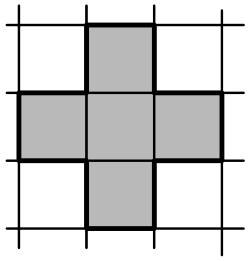
- Scoprire che si possono ottenere 6 diverse figure con almeno un asse di simmetria

Livello: 8 - 9

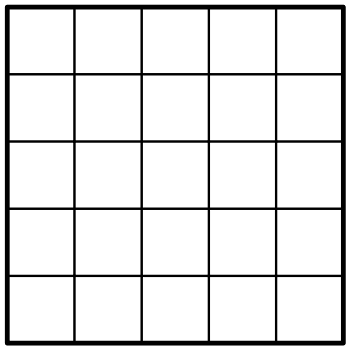
Origine: Aosta

18. CROCI GRECHE (Cat. 9)

La figura disegnata qui a fianco è una croce greca che ha tutti i lati uguali.



Seguendo la quadrettatura, si vuol tagliare questo quadrato nel minor numero possibile di pezzi in modo da formare con essi due croci greche di dimensioni differenti, e ciascuna con tutti i lati uguali.



Indicate i vostri ritagli e disegnate le due croci greche che trovate.

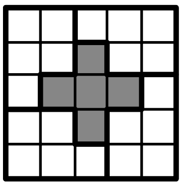
ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

- Geometria

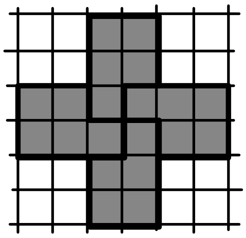
Analisi del compito

- Rendersi conto che la croce di lato 1 ha area 5 quadretti e la successiva, di lato 2, avrà area 20 e che quindi, tagliando il quadrato di area 25, si possono formare solo queste due prime croci greche.
- Procedere per tentativi e scoprire che ci sono soluzioni con 6 pezzi o più. Esiste anche una soluzione con 5 pezzi: l'unico modo per ottenerla è ritagliare la croce piccola al centro del quadrato e suddividere la parte rimanente in 4 pezzi congruenti (disegno **A**) che opportunamente incastrati formano la croce greca di lato 2 (disegno B)



A

B

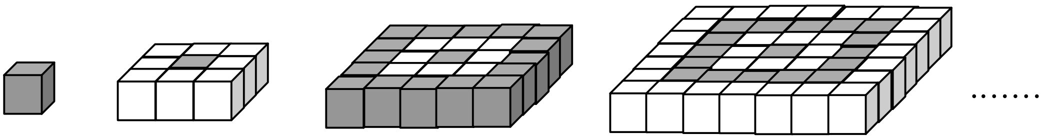


Livello: 9

Origine: Genova dalla "rivisitazione" di un problema di Sam Loyd

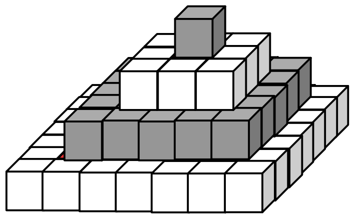
19. LE PIRAMIDI DI FILIPPO (Cat. 9)

Filippo costruisce piattaforme sempre più grandi a partire da un cubetto grigio, aggiungendo alternativamente cornici di cubetti bianchi e cornici di cubetti grigi.



Con il cubetto grigio e la prima piattaforma costruisce una piramide a due piani, con il cubetto grigio e le prime due piattaforme costruisce una piramide a tre piani, e così via.

In figura è mostrata una piramide a quattro piani.



Filippo osserva che per questa piramide ha utilizzato più cubetti bianchi che grigi e si chiede che cosa succederà in una piramide a cinque piani, e in una a undici piani.

In entrambi i casi calcolate la differenza tra il numero dei cubetti di ciascun colore.

Spiegate le vostre risposte.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

- Aritmetica: somme, multipli, sequenze regolari di numeri
- Geometria: visione spaziale, costruzione regolare
- Algebra

Analisi del compito:

- Considerare il numero di cubetti bianchi e rossi per piano e costruire la seguente tabella:

Piano:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	n (pari)
cubi grigi	1	1	17 (1+16)	17	49 (1+16+32)	49	97 (1+16+32+48)	97	161	1+ 2n(n-2)
cubi bianchi	0	8	8	32 (8+24)	32	72 (8+24+40)	72	128 (8+24+40+56)	128	$2n^2$
totale	1	9	25	49	81	121	169	225	289	$(2n-1)^2$

quindi considerare le piramidi; addizionando i risultati precedenti si ottengono le seguenti successioni:

piani	1	2	3	4	5	6	7	8….	n (pari)	n(dispari)
Grigi	1	2	19	36	85	134	231	328…		
Bianchi	0	8	16	48	80	152	224	352…		
G-B	1	-6	3	-12	5	-18	7	-24…	-3n	n

Concludere che in una piramide di 5 piani la differenza G-B è 5 e in quella di 11 piani è 11

Oppure:

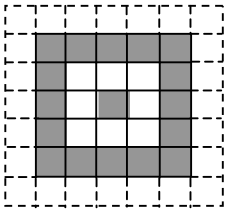
- Trovare lo stesso risultato lavorando "in verticale" sulla piramide: una piramide di n piani ha al centro n cubetti grigi con intorno 8(n-1) cubetti bianchi, con intorno 16(n-2) cubetti grigi, con intorno 24(n-3) cubetti bianchi, ecc…

Oppure:

- Rendersi conto che, senza contare la colonna centrale di cubetti grigi, nei vari piani abbiamo la seguente distribuzione:

Primo piano	Bianchi 0	Grigi 1		
Secondo piano	Bianchi 8	Grigi 0		
Terzo piano	Bianchi 8	Grigi 16		
Quarto piano	Bianchi 8	Grigi 16	Bianchi 24	
Quinto piano	Bianchi 8	Grigi 16	Bianchi 24	Grigi 32

Etc....



- Scoprire che ogni cornice aggiunge di volta in volta un successivo multiplo di 8
- Dedurre che la differenza per ciascun piano tra Bianchi e Grigi (sempre senza considerare la colonna centrale) è:

  Secondo piano B-G = 8;

  Terzo piano B-G = -8,

  Quarto piano B-G = 16,

  Quinto piano B-G = -16

  Etc...
- Dedurre che, sempre senza considerare la colonna centrale, la differenza totale tra il numero di cubetti grigi e quello di cubetti bianchi in ciascuna piramide è uguale alla somma algebrica delle differenze nei vari piani, si ha pertanto:

  piramide di due piani: differenza 8

  piramide di tre piani: differenza 0

  piramide di quattro piani: differenza 16

  piramide di cinque piani: differenza 0

  ....

  piramide di n piani, con n pari: differenza 8(n/2)

  piramide di n piani, con n dispari: differenza 0.
- Computare i cubetti grigi della colonna centrale e concludere che in una piramide con un numero n, dispari, di piani la differenza totale G-B tra il numero dei cubetti grigi e quello dei cubetti bianchi è proprio n. Pertanto in una piramide di 5 pian, G-B= 5, mentre in una di 11, G-B=11.

Livello: 9

Origine: Siena