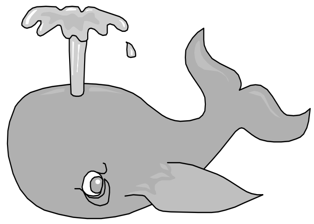
## 1. OLGA LA BALENA (Cat. 3)

La balena Olga si chiede:
«Quanti uomini occorreranno per fare il mio peso?».
Voi potete aiutarla seguendo queste indicazioni:

- 5 mucche fanno il peso di un elefante;
- 10 uomini fanno il peso di una mucca;
- 30 elefanti fanno il peso di una balena.



**Quanti uomini sono necessari per fare il peso di Olga?**

**Spiegate come avete fatto a trovare la risposta.**

---

**ANALISI A PRIORI**

**Ambito concettuale**

- Aritmetica: numeri naturali, moltiplicazione, equivalenze
- Organizzazione di una ricerca

**Analisi del compito**

- Rendersi conto che i dati non sono comunicati nell'ordine cronologico necessario alla risoluzione.
- Procedere all'organizzazione dei dati risalendo progressivamente dagli uomini fino alla balena (uomini→mucche→elefanti→balena) o viceversa.
- Moltiplicare il numero di animali ad ogni tappa, poi fare il prodotto finale del numero di uomini: 10 x 5 x 30= 1500.
- Formulare la risposta esprimendo il peso della balena rispetto all'unità di misura richiesta (peso-uomo).
- Oppure: operare via via dalla lettura delle informazioni, 5 mucche = 1 elefante; 10 uomini = 1 mucca; quindi 1 elefante = 50 uomini; poiché 30 elefanti = 1 balena, allora 1 balena = 30 x 50 uomini, cioè 1500 uomini.

**Punteggio 4** : Risposta corretta (1500 uomini) con spiegazione chiara (calcoli, diagrammi, testo, …)

**Livello:** 3

**Origine:** Lyon

## 2. CASETTE DA COLORARE (Cat. 3, 4)

Dario ha disegnato 7 casette e le ha collegate con delle strade come si vede nel disegno.

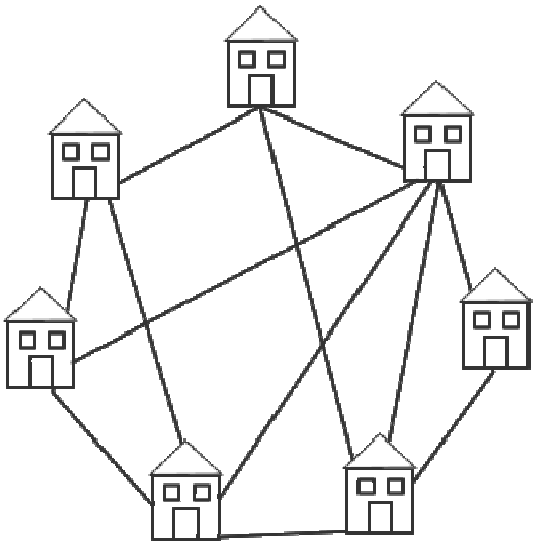
Egli chiede a Cristina di colorare le casette rispettando le seguenti regole:

- usare colori diversi per le casette collegate da una strada;
- utilizzare il minor numero possibile di colori.

Cristina riesce a soddisfare la richiesta di Dario utilizzando solo 4 colori.

**E voi riuscite a colorare le casette, con le stesse regole, utilizzando meno di 4 colori?**

**Se ci riuscite mostrate la vostra soluzione, colorando le casette.**



**ANALISI A PRIORI**

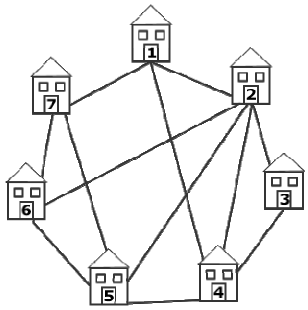
**Ambito concettuale**

- Logica e ragionamento: deduzione, combinatoria

**Analisi del compito**

- Cominciare colorando con colori diversi due casette collegate fra loro e procedere passo passo cercando di rispettare le regole.

Per esempio se la casetta 1 è colorata di rosso e la 2 di blu, la 3 non può essere blu perché collegata alla 2, ma può essere rossa perché non collegata alla 1; la 4 non può essere né rossa né blu perché collegata alla 1 e alla 2: si può colorare, ad esempio, di verde. Allora la 5 non può essere né blu né verde …




- Oppure: colorare una casetta e trovare quelle che possono essere eventualmente colorate con lo stesso colore o quelle che sono necessariamente di un altro colore. Continuare allo stesso modo e verificare di volta in volta che le regole sono rispettate.

  Per esempio: colorare per prima la casetta 3 di rosso. In questo caso possono essere rosse anche le casette 1 e 5; la casetta 2 non può essere rossa: può essere per esempio blu; allora può essere blu anche la casetta 7. A questo punto le casette 4 e 6 devono essere necessariamente di un altro colore, ad esempio verde.
- Oppure: rendersi conto che sono necessari almeno tre colori perché ci sono terne di casette tutte collegate tra loro (es. 1-2-4; 2-3-4; 2-5-6; ...). Considerare ad esempio il triangolo 2-5-6 e attribuire un colore diverso a ciascun vertice. Dedurre i colori possibili per le altre casette rispettando le regole.
- Oppure: procedere per tentativi più o meno organizzati con controllo delle regole e aggiustamenti successivi.
- Risposta: 1, 3 e 5 di uno stesso colore
  4 e 6 di un secondo colore
  2 e 7 di un terzo colore

I colori sono solo a titolo esemplificativo

| casette → | 1 | 3 | 5 | 4 | 6 | 2 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| soluzione 1 | B | B | B | V | V | R | R |
| soluzione 2 | B | B | B | R | R | V | V |
| soluzione 3 | V | V | V | B | B | R | R |
| soluzione 4 | V | V | V | R | R | B | B |
| soluzione 5 | R | R | R | B | B | V | V |
| soluzione 6 | R | R | R | V | V | B | B |

**Punteggio 4** : Una soluzione corretta che mostra una colorazione con 3 colori ben distinguibili

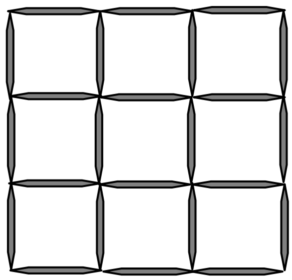
Livello: **3, 4**

**Origine:** Bourg-en-Bresse

## 3. IL GIOCO DEI QUADRATI CHE SPARISCONO (Cat. 3, 4)

Andrea e Marco hanno inventato un gioco con gli stuzzicadenti. Ne hanno disposti 24 in modo da formare una griglia quadrata come quella che vedete qui accanto.

In questa griglia si possono vedere molti quadrati: alcuni piccoli, uno grande e altri “medi”.



Il gioco consiste nel togliere 3 stuzzicadenti in modo da vedere il minor numero possibile di quadrati.

Marco ha tolto 3 stuzzicadenti, ma nella griglia si possono ancora vedere 7 quadrati: 6 piccoli e 1 medio (figura A).

Anche Andrea ha tolto 3 stuzzicadenti e ha fatto meglio di Marco. Nella sua griglia si vedono solo 6 quadrati: 5 piccoli e quello grande (figura B).

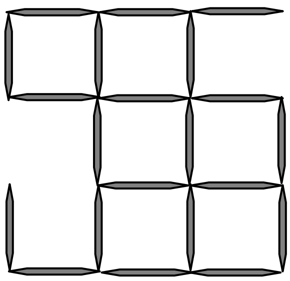


figura A: la griglia di Marco

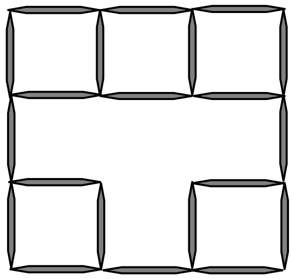


figura B: la griglia di Andrea

**E voi riuscite a fare meglio di Marco togliendo 3 stuzzicadenti dalla griglia completa?**

**Provate e disegnate il vostro miglior risultato, cioè quello in cui si vedono meno quadrati.**

**Dite quanti quadrati si possono vedere nella vostra griglia ed evidenziateli con il colore in modo da distinguerli chiaramente.**

---

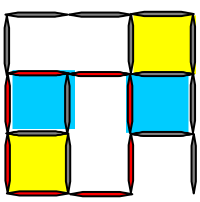
### ANALISI A PRIORI

**Ambito concettuale**

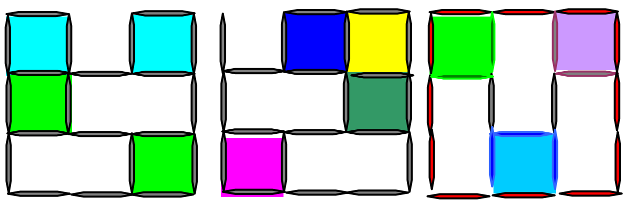
- Geometria: organizzazione e visualizzazione nel piano, riconoscimento di quadrati

**Analisi del compito**

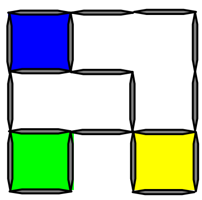
- Comprendere che ci sono quadrati di più grandezze: il grande, i medi (4) e i piccoli (9).
- Comprendere che togliere uno stuzzicadenti equivale ad eliminare più quadrati e che questo numero dipende dalla posizione nella griglia dello stuzzicadenti tolto e dalle posizioni reciproche dei tre stuzzicadenti. Per esempio, togliendo un primo stuzzicadenti dal quadrato centrale si eliminano 4 quadrati.
- Procedere così cercando di togliere quegli stuzzicadenti che permettono di eliminare il più grande numero di quadrati, fino a giungere ad una configurazione ottimale che ne conservi il minimo numero, cioè 4. Per esempio :



soluzione non ottimale “5” (2 punti)



tre soluzioni ottimali “4” (4 punti)



soluzione errata (mancano 4 stecchini) “3” (1 punto)

- Disegnare la configurazione in modo che si capisca chiaramente quali sono gli stuzzicadenti eliminati, indicare il numero di quadrati ottenuti e colorarli in modo da poterli distinguere chiaramente.

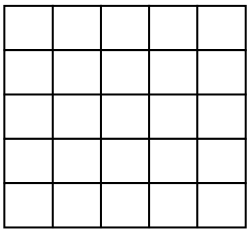
**Punteggio 4** : Soluzione ottimale, nella quale siano chiaramente esplicitate le informazioni richieste: “4 quadrati”, disegno chiaro, i quattro quadrati colorati distintamente.

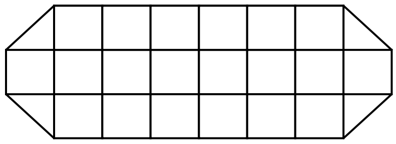
Livello: **3**, **4** Origine: **Siena**

## 4. I TAVOLI DI ZIA MARIA (Cat. 3, 4)

Zia Maria ha due vecchi tavoli da giardino come quelli disegnati qui sotto:

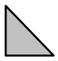
un tavolo quadrato e un tavolo allungato





La zia decide di ricoprire i suoi tavoli con pezzi di carta plastificata adesiva di due tipi:

- pezzi quadrati, rossi, della stessa grandezza dei quadrati dei tavoli: 

- pezzi triangolari, verdi, che sono la metà dei quadrati: 

Finito il suo lavoro, zia Maria osserva che i due tavoli sono interamente ricoperti e che i pezzi sono tutti uno accanto all'altro, senza sovrapporsi.
La zia osserva anche che ha utilizzato 34 pezzi per ciascuno dei due tavoli, cioè 68 pezzi in tutto.

**Quanti quadrati rossi e quanti triangoli verdi ha usato zia Maria per ricoprire il tavolo quadrato? E il tavolo allungato?**
**Spiegate come avete fatto a trovare le vostre risposte.**

---

**ANALISI A PRIORI**

**Ambito concettuale**
- Aritmetica: conteggio
- Geometria: quadrato, triangolo, "misura" dell'area attraverso pavimentazione con unità di misura opportuna

**Analisi del compito**
- Comprendere che occorre determinare un'unità di misura (quadretto o triangolo).
- Rendersi conto della relazione fra le due unità di misura (metà/doppio).
- Capire che, poiché zia Maria usa 34 pezzi per ognuno dei due tavoli, per il tavolo quadrato non può usare solo pezzi quadrati (che sarebbero solo 25 pezzi). Per l'altro tavolo è già evidente che ci sono pezzi misti, ma è necessario capire che anche qui i pezzi devono essere 34. Questo è il punto centrale della comprensione dell'enunciato.
- Per il tavolo quadrato fare ipotesi successive sul numero di pezzi quadrati e sul corrispondente numero di pezzi triangolari che permettono di completare la pavimentazione, e verificare se si ottengono 34 pezzi con una tabella del tipo seguente:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| quadrati | 24 | 23 | 22 | 21 | 20 | 19 | 18 | 17 | **16** | 15 |
| triangoli | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | **18** | 20 |
| totale pezzi | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | **34** | 35 |

fino ad arrivare alla soluzione: 16 pezzi quadrati e 18 triangolari. Se si prosegue, anche di un solo termine la ricerca, si può constatare che la soluzione è unica. (Questo aspetto potrebbe essere ripreso nell'uso in classe del problema.)

- Per il secondo tavolo lavorare con una tabella del tipo seguente che tiene presente, per esempio, che ci sono già obbligatoriamente 4 triangoli:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| triangoli presenti | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| quadrati | 20 | 19 | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | **10** |
| altri triangoli | | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | **20** |
| totale pezzi | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | **34** |

Oppure: "tagliare" i quadrati in ciascuno dei due disegni fino ad arrivare ad avere 34 pezzi: 16 q e 18 t per il tavolo quadrato; 10 q e 24 t per il tavolo non quadrato

Oppure: capire che:

poiché il tavolo quadrato è formato da 25 quadrati, 9 di questi (34-25) devono essere tagliati a metà, quindi si utilizzeranno 18 t e 16 q (25-9);

poiché nel tavolo non quadrato ci sono 20 quadrati e 4 triangoli, 10 q (34-4-20) dovranno essere ricoperti con 20 triangoli e 10 potranno essere ricoperti dai quadrati.

Oppure: procedere per tentativi dividendo successivamente un quadrato dopo l'altro in triangoli, magari ricorrendo al colore rosso e verde, fino ad arrivare al numero di pezzi richiesto o ancora scomporre tutti i quadrati visibili in triangoli per poi ricomporre il numero necessario di quadrati per raggiungere i 34 pezzi. (L'uso del colore per la diversa forma dei ritagli può dare un senso alla diversità dei due campioni quadrato e triangolo).

- Concludere che, per il tavolo quadrato, la zia userà 18 triangoli e 16 quadrati, e per il tavolo ottagonale userà 24 triangoli e 10 quadrati.

**Punteggio 4** : Le due risposte corrette (16 q e 18 t; 10 q e 24 t) con la spiegazione del procedimento seguito (per esempio le due tabelle) o con i disegni chiari dei pezzi usati

**Livello:** 3, 4

**Origine:** Gruppo "ellealquadrato" (gruppo permanente per la costruzione del concetto di area)

## 5. IL CILIEGIO (Cat. 3, 4, 5)

Riccardo e Marco decidono di raccogliere ciliegie dal ciliegio del loro giardino. Per far questo appoggiano al tronco dell'albero una scala a pioli.

Riccardo sale sulla scala. Quando si trova esattamente al terzo piolo al di sopra di quello che segna la metà della scala, viene spaventato dallo sbattere di ali di un uccellino. Allora, precipitosamente, scende di 5 pioli!

Marco, che è rimasto ai piedi della scala, gli dice allora di risalire di 9 pioli per arrivare alla fine della scala … e prendere tutte le ciliegie.

**Quanti sono i pioli della scala?**

**Spiegate il vostro ragionamento.**

---

**ANALISI A PRIORI**

**Ambito concettuale**

- Aritmetica: le quattro operazioni; linea dei numeri

**Analisi del compito**

- Si può ragionevolmente pensare che la metà della scala sia la base di partenza e quindi ragionare solo con i numeri dati dal problema, +3-5+9 = 7. Trovare che ci sono 7 pioli al di sopra di quello che segna la metà della scala e dunque che la scala comprende 15 pioli (7+1+7).

Oppure: aiutarsi con un disegno di una retta orientata (o di una scala) dove segnare le varie posizioni occupate da Riccardo e quindi procedere come sopra o contare i pioli.

**Punteggio 4** : Risposta corretta (15 pioli) con spiegazione chiara e dettagliata, o disegno con schema a frecce indicante, per esempio, le posizioni successive

**Livello:** 3, 4, 5

**Origine:** Riva del Garda

## 6. LE SUPERFICI DEL SIGNOR BARATTOLO (Cat. 4, 5)

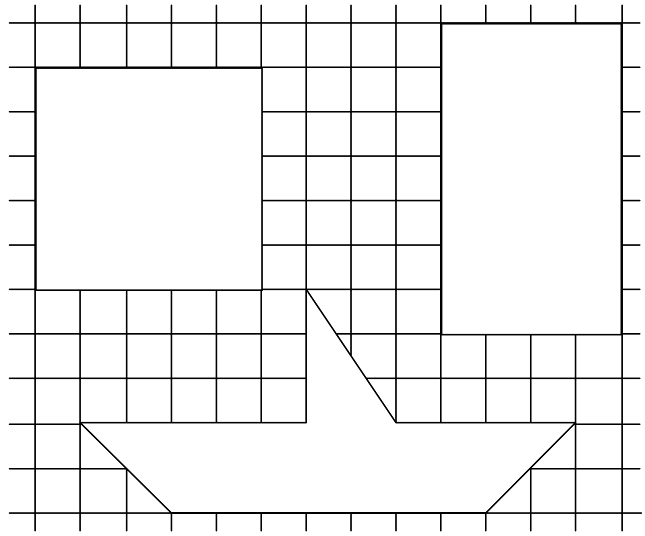
Il signor Barattolo vuole dipingere le superfici disegnate qui a fianco in modo che lo spessore della vernice sia sempre lo stesso.

Possiede tre barattoli uguali di pittura.

Ne utilizza completamente uno per colorare tutta la superficie quadrata.

**Con i due barattoli restanti e mettendo lo stesso spessore di vernice, potrà dipingere interamente, le altre due superfici?**

**Spiegate come avete fatto a trovare la vostra risposta.**



---

**ANALISI A PRIORI**

**Ambito concettuale**

- Geometria: figure piane, quadrato, rettangolo, trapezio, triangolo, scomposizione di una figura
- Grandezze e misura: misura di una superficie con unità di misura opportune, confronto di aree

**Analisi del compito**

- Appropriarsi della situazione: vedere che non si può semplicemente attribuire un barattolo a ciascuna figura e che bisognerà analizzare con più attenzione il problema, interessandosi a ciò che si dipinge (la superficie) e non alla forma o alla grandezza apparente delle figure.
- Pensare ad una procedura di confronto delle aree delle figure, osservando che il rettangolo sembra più grande del quadrato, ma per esserne sicuri bisogna suddividere le figure secondo la quadrettatura data (prolungando questa quadrettatura all'interno delle figure) per trovare, contando i quadretti (unità d'area), che il quadrato vale 25 quadretti e il rettangolo 28.
- "Misurare" la barca facendone una riproduzione e ritagliando in quattro parti: la vela, e tre parti per lo scafo (il rettangolo 7x2, in quadretti, e i due triangoli "laterali" che uniti formano un quadrato 2x2, in quadretti).

  Calcolare il numero di quadretti dello scafo: 14 q per il rettangolo; 4 q per il quadrato. Il triangolo-vela costituisce la difficoltà del problema. Si risolve facilmente se si pensa il triangolo in quanto metà del rettangolo avente per base 2 q e per altezza 3 q, dunque in totale 3 quadretti. Altrimenti vedere il triangolo, con i vari pezzettini, come un rettangolo 3 x 1. Forse si arriva ad un rettangolo 1,5 x 2!!

  Trovare quindi che in totale la barca vale 21 quadretti: 14 q + 4 q + 3 q.

Oppure, per calcolare il numero di quadretti della barca:

- Trovare l'area in quadretti, calcolando l'area del trapezio (scafo) di basi (in lati di quadretti) 7 q e 11 q e di altezza (in lati di quadretti) 2 q, quindi 18 quadretti e l'area del triangolo di lati 3 q e 2 q, quindi 3 quadretti.
- Per rispondere alla domanda del problema: dedurre che un barattolo di pittura vale 25 quadretti e due barattoli valgono 50 quadretti.
- Addizionare le aree delle altre due superfici (28 +21 = 49, in q) per trovare che i barattoli rimasti saranno sufficienti e avanzerà l'equivalente di un 'quadretto' di pittura, oppure capire che con un barattolo e un po' (l'equivalente di 3 quadretti) dell'altro, si può dipingere il rettangolo e con la pittura rimasta (l'equivalente di 22 quadretti) si può dipingere completamente la barca e resta inutilizzato l'equivalente di un quadretto di pittura.

Oppure: cercare di ricoprire due quadrati con i pezzi provenienti dal ritaglio del rettangolo e della barca (metodo piuttosto complesso).

- Scrivere la risposta e redigere le spiegazioni.

**Punteggio 4** : Risposta corretta (sì) con spiegazione chiara e completa anche attraverso disegni (con l'indicazione delle misure delle aree delle diverse parti e della loro somma e modo di trovarle per conteggio, per ritaglio e incollaggio, etc.) del percorso seguito per trovare la risposta

**Livello**: 4, 5

**Origine**: Gruppo "ellealquadrato" (gruppo permanente per la costruzione del concetto di area)

## 7. ZAINO RMT (Cat. 4, 5, 6)

Filippo e Pietro hanno acquistato lo stesso zaino della marca RMT.

Filippo ha messo nel suo zaino 2 raccoglitori ad anelli, 6 quaderni e 3 libri. Pietro ha messo nel suo zaino 1 raccoglitore ad anelli, 8 quaderni e 2 libri.

Pietro e Filippo sanno che il peso di un raccoglitore ad anelli è uguale al peso di 4 quaderni, ma è anche uguale al peso di 2 libri.


**Chi ha lo zaino più pesante?**

**Spiegate come avete fatto a dare la vostra risposta.**

**ANALISI A PRIORI**

**Ambito concettuale**

-Aritmetica: equivalenza, addizione, moltiplicazione

**Analisi del compito**

- Comprendere che il peso di uno zaino vuoto non interviene nel confronto poiché i due amici possiedono lo stesso tipo di zaino.
- Compilare la lista degli oggetti di Filippo e Pietro, per esempio sottoforma di tabella :

| Filippo | Pietro |
|---|---|
| 2 raccoglitori | 1 raccoglitore |
| 6 quaderni | 8 quaderni |
| 3 libri | 2 libri |

- Dedurre dalle informazioni del testo che il peso di un libro è uguale al peso di due quaderni.
- Ricercare le equivalenze, scegliere un'unità di misura ed esprimere ogni oggetto con la stessa unità, per esempio in quaderni, che è la più piccola unità comune. Calcolare il totale in quaderni per ciascun amico. Riportare le conclusioni, per esempio, in tabella nel seguente modo:

| Filippo | | Pietro | |
|---|---|---|---|
| 2 raccoglitori | 8 quaderni | 1 raccoglitore | 4 quaderni |
| 6 quaderni | 6 quaderni | 8 quaderni | 8 quaderni |
| 3 libri | 6 quaderni | 2 libri | 4 quaderni |
| Totale | 20 quaderni | Totale | 16 quaderni |

Oppure: individuare equivalenze e togliere ciò che è in comune (facendolo vedere):

| Filippo | | Pietro | |
|---|---|---|---|
| ~~2 raccoglitori~~ | 1 raccoglitore | ~~1 raccoglitore~~ | 0 raccoglitori |
| ~~6 quaderni~~ | 0 quaderni | ~~8 quaderni~~ | 2 quaderni |
| ~~3 libri~~ | 1 libro | ~~2 libri~~ | 0 libri |

Dedurre che lo zaino di Filippo è più pesante di quello di Pietro poiché un raccoglitore (cioè 4 quaderni) è più pesante di 2 quaderni.

Cercare le equivalenze ed esprimerle rispetto all'unità più piccola, per esempio riportando così i dati in tabella :

| Filippo | | Pietro | |
|---|---|---|---|
| 1 raccoglitore | 4 quaderni | 0 raccoglitori | |
| 0 quaderni | | 2 quaderni | 2 quaderni |
| 1 libro | 2 quaderni | 0 libri | |
| Totale | 6 quaderni | Totale | 2 quaderni |

Oppure: attribuire un peso ad uno degli oggetti e determinare il peso degli altri due. Per esempio, attribuire 200 g per un raccoglitore e quindi 50 g per un quaderno e 100 g per un libro. Poi calcolare il peso di ogni zaino :

- per Filippo: 2 x 200 + 6 x 50 + 3 x 100 = 1000 (in grammi)
- per Pietro: 200 + 8 x 50 + 2 x 100 = 800 (in grammi)

- Concludere che lo zaino più pesante è quello di Filippo.

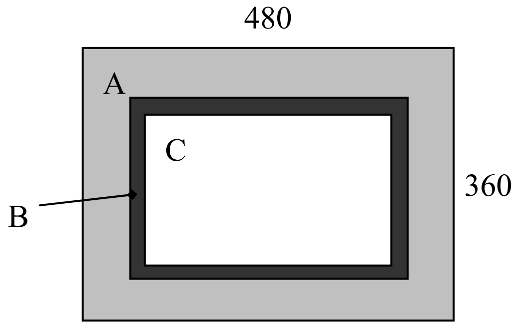
**Punteggio 4** : Soluzione corretta (Filippo possiede lo zaino più pesante) con spiegazione completa e ben giustificata del procedimento.

Livello: **4, 5, 6** Origine: **Belgique**

## 8. IL PAVIMENTO DECORATO (Cat. 5, 6)

Il pavimento della camera di Alice ha la forma di un rettangolo i cui lati misurano esattamente 360 cm e 480 cm.

Alice vuole ricoprire il pavimento con mattonelle di legno di forma quadrata di 20 cm di lato, in modo da formare il disegno seguente:




- La parte A (in grigio chiaro) sarà formata di tre file di mattonelle di legno di quercia, disposte lungo il bordo del pavimento
- La parte B (in grigio scuro) sarà costituita da una sola fila di mattonelle di legno intarsiato, disposte a fianco di quelle della parte A
- La parte C (in bianco), al centro, formerà un rettangolo costituito da mattonelle in legno di pino, più chiare.

**Quante mattonelle di quercia, quante di legno intarsiato e quante di pino saranno necessarie per ricoprire il pavimento della camera di Alice?**

**Spiegate il vostro ragionamento.**

---

**ANALISI A PRIORI**

**Ambito concettuale**

- Geometria: rettangolo; pavimentazione
- Grandezze e misura: perimetro ed area e loro misura
- Aritmetica: le quattro operazioni

**Analisi del compito**

- Immaginare che la camera sia interamente ed esattamente quadrettata dalle mattonelle di legno, ovvero che ci sia un numero intero di mattonelle nella lunghezza e nella larghezza.
- Calcolare il numero di mattonelle nella lunghezza e nella larghezza della stanza: 480 : 20 = 24; 360 : 20 =18.
- Costruire un modello del pavimento della camera su carta quadrettata, di 18x24 quadretti; disegnare le file successive e distinguerle, poi contare i quadrati di ogni tipo: al centro 10x16=160, la cornice per esempio 2x(10+16)+4=56, il bordo, per esempio, 12x18+4x9 =216.

  Benché non sia indispensabile si può terminare verificando che la somma di tutte le mattonelle (216+56+160=432) è uguale al numero delle mattonelle della camera (area del rettangolo: 24x18=432).

Oppure, senza ricorrere al modello su carta quadrettata:

- Dedurre le dimensioni del rettangolo centrale in lati di mattonelle (o in cm, cosa più difficile) togliendo le 8 file delle parti A e B: 24 – 8 =16 e 18 – 8 =10. Poi calcolare il numero delle mattonelle corrispondenti, 160, quindi procedere come prima o per rettangoli successivi 12x18 = 216 e 18x24 = 432 ed infine per sottrazione: 216-160=56 e 432-160-56=216.

Oppure, senza considerare le mattonelle e lati di mattonelle come unità, ma rimanendo in $cm^2$ e cm, seguire il procedimento precedente, facendo uso di numeri grandi e di tante moltiplicazioni e divisioni per 20. Per esempio, calcolare che una mattonella ha l'area di 400 $cm^2$, calcolare che l'area totale è 172800 $cm^2$, trovare che le dimensioni del rettangolo interno sono 480-(8x20)=320 e 380-(8x20)=200, etc.

**Punteggio 4** : Soluzione corretta e completa (160 mattonelle di pino, 56 mattonelle decorate, 216 mattonelle di quercia) con spiegazione del conteggio o delle operazioni

Livello: **5, 6**

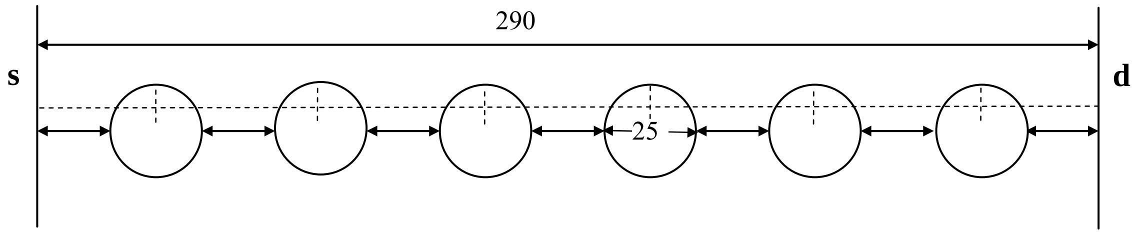
**Origine:** Siena

## 9. PIATTI DECORATIVI (Cat. 5, 6)

Per abbellire la sua cucina, Luigi ha comprato sei piatti decorati, di 25 cm di diametro ciascuno, da appendere su una parete lunga 290 cm.

Ogni piatto ha un gancio posto sul retro, al di sopra del centro.

Luigi vuole appendere i piatti in modo che siano allineati alla stessa altezza. Egli vuole anche che le distanze tra due piatti vicini, la distanza tra il piatto di sinistra e la parete di sinistra, la distanza tra il piatto di destra e la parete di destra siano tutte uguali, come nel disegno qui sotto.




(Nel disegno i segmenti **s** e **d** indicano la parete di sinistra e la parete di destra. I punti di intersezione tra i segmenti punteggiati mostrano dove bisognerà piantare i chiodi)

**A quale distanza dalla parete di sinistra Luigi deve piantare ognuno dei sei chiodi per appendere i piatti?**

**Spiegate il vostro ragionamento.**

---

**ANALISI A PRIORI**

**Ambito concettuale**

- Geometria: misura e grandezze, intervalli regolari
- Aritmetica: operazioni

**Analisi del compito**

- Comprendere che la distanza tra il primo chiodo e la parete di sinistra e tra l'ultimo chiodo e la parete di destra sono differenti dalla distanza tra due chiodi consecutivi.
- Togliere dalla lunghezza della parete i diametri di tutti i piatti per trovare 140 cm (290 – 25x6).
- Dividere la lunghezza trovata in 7 intervalli uguali (i 5 intervalli fra due piatti consecutivi + l'intervallo tra la parete di sinistra e il primo piatto + l'intervallo tra l'ultimo piatto e la parete di destra): 140 : 7 = 20, in cm.
- Rendersi conto che per trovare la distanza tra la parete di sinistra e il primo chiodo bisogna sommare la lunghezza di una delle parti trovate (20 cm) con la metà del diametro di un piatto, cioè 20+25:2=32,5 in cm, e che per trovare la misura della distanza dei chiodi successivi dalla parete di sinistra è necessario sommare 1 volta, due volte, …a questa distanza (32,5 cm) la somma dell'intero diametro del piatto e della distanza tra due piatti successivi (45 cm):
  1° chiodo: 32,5; 2° chiodo: 77,5; 3° chiodo: 122,5; 4° chiodo: 167, ; 5° chiodo: 212,5; 6° chiodo 257,5.

**Punteggio 4** : Le sei misure corrette (32,5 cm; 77,5 cm; 122,5 cm; 167,5 cm; 212,5 cm; 257,5 cm) con spiegazione del procedimento seguito

**Livello:** 5, 6

**Origine:** Udine

## 10. ROSE E IRIS (Cat. 5, 6, 7)

La fioraia Isidora ha rose ed iris. Prepara 6 mazzi senza mescolare i due tipi di fiori: alcuni solo con le rose, gli altri solo con gli iris. Alla fine Isidora ha utilizzato tutti i suoi fiori ed ha ottenuto questi mazzi: un mazzo di 3 fiori, uno di 5 fiori, uno di 7 fiori, uno di 10 fiori, uno di 15 fiori e l'ultimo di 20 fiori.

Isidora guarda uno dei mazzi che ha preparato e pensa tra sé: «Se vendo questo, mi resterà un numero di rose doppio di quello degli iris rimasti».

**Quale mazzo guarda Isidora?**

**Spiegate come lo avete trovato e dite da quali fiori potrebbero essere composti ciascuno dei cinque mazzi che restano.**

---

**ANALISI A PRIORI**

**Ambito concettuale**

- Aritmetica: addizione di numeri naturali e suddivisione in due parti di cui l'una è il doppio dell'altra

**Analisi del compito**

- Appropriarsi della situazione: mazzi composti solo di iris o solo di rose, senza mazzi misti; i fiori che resteranno dopo la vendita di un mazzo saranno quelli che compongono i cinque altri mazzi, sempre di rose o di iris.
- Lavorare con tentativi non organizzati:
  - vendita del primo mazzo di 3 fiori; restano 5 + 7 + 10 + 15 + 20 = 57 fiori; ricerca di una ripartizione «il numero di rose è doppio del numero di iris»: impossibile con un solo mazzo di iris, impossibile con due mazzi di iris, impossibile con tre mazzi, etc. e rendersi conto che non si potrà arrivare con i numeri a disposizione a una somma di 19 per gli iris e 38 per le rose;
  - stesso procedimento per la vendita del secondo mazzo, etc.;
  - scoperta che con il quinto mazzo di 15 fiori restano 3 + 5 + 7 + 10 + 20 = 45 fiori che si possono ripartire tra 5+10 iris e 3+7+20 = 30 rose oppure tra 3+5+7 iris e 10+20 rose;
  - verificare che con il sesto mazzo restano 40 fiori e che la ripartizione è impossibile.

Oppure: calcolare il numero di fiori totale: 3 + 5 + 7 + 10 + 15 + 20 = 60; rendersi conto che sarà necessario provare tutte le possibilità per i resti dopo la vendita di un mazzo: 60–3= 57, 60–5= 55, 60–7= 53, 60–10= 50, 60–15= 45, 60–20= 40; rendersi inoltre conto che se il numero di rose che restano è il doppio di quello degli iris, il numero totale restante di fiori sarà il triplo di quello degli iris e considerare di conseguenza solo i multipli di 3: 57 e 45. Vedere, come in precedenza, che per il primo caso la ripartizione 19 e 38 non è possibile e che solo la ripartizione 15 e 30 permette di arrivare alla soluzione: vendita del mazzo di 15 fiori, restano due mazzi da 5 e10 iris e tre mazzi da 3, 7 e 20 rose oppure restano tre mazzi da 3, 5 e 7 iris e due mazzi da 10 e 20 rose.

**Punteggio 4** : Risposta corretta completa (vendita del mazzo da 15 fiori; restano 2 mazzi da 5 e 10 iris e 3 mazzi da 3, 7 e 20 rose oppure restano 3 mazzi da 3, 5 e 7 iris e 2 mazzi da 10 e 20 rose) con spiegazione del procedimento e verifica che il mazzo di 15 fiori è l'unico accettabile (sono stati analizzati gli altri casi ed esclusi, quindi la risposta non è data a caso)

**Livello:** 5, 6, 7

**Origine :** Bourg-en-Bresse (da Perelman, La mathématique vivante, Cedic)

## 11. NUMERI NASCOSTI (Cat. 5, 6, 7)

Alberto lancia una sfida al suo amico Giovanni. "Guarda la tabella: ogni simbolo corrisponde ad un numero intero, formato da una o da due cifre. Uno stesso simbolo corrisponde sempre ad uno stesso numero!

La somma dei numeri di ogni riga è scritta nell'ultima casella a destra, la somma dei numeri di ogni colonna è scritta nell'ultima casella in basso.

**Quali sono i numeri rappresentati dai quattro simboli?** "

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ★ | △ | ★ | □ | **29** |
| ○ | ★ | ○ | ○ | **30** |
| △ | □ | △ | △ | **13** |
| □ | □ | ★ | ○ | **20** |
| **23** | **18** | **34** | **17** | |

**Aiutate Giovanni a trovare questi numeri.**

**Spiegate il vostro ragionamento.**

---

**ANALISI A PRIORI**

**Ambito concettuale**

- Aritmetica: le quattro operazioni nell'insieme dei numeri naturali
- Logica: formulare ipotesi che tengano conto delle relazioni e delle condizioni espresse nel testo e attribuire un significato coerente con i dati assegnati dal testo ai simboli

**Analisi del compito**

- Capire che uno stesso simbolo corrisponde sempre ad uno stesso numero formato da una o da due cifre.
- Procedere per tentativi ed errori: attribuire valori numerici ai diversi simboli, effettuare le addizioni e confrontare i risultati con i numeri scritti rispettivamente alla fine delle righe e delle colonne.

Oppure: procedere per confronto e deduzione, ad esempio:

confrontare la prima riga e la prima colonna e dedurre che il valore del simbolo «stella» equivale al valore del «cerchio» più 6. In seguito, dall'analisi della seconda riga, ricavare il valore del «cerchio»: 4 x «cerchio» + 6 = 30; da cui 4 x «cerchio» = 24, quindi «cerchio» = 24/4 = 6. Di conseguenza il valore del simbolo «stella» è 6+6 =12;

osservare la terza colonna e trovare il valore di «triangolo»: 34 – (12 + 12 + 6) = 4;

- o, dall'analisi della quarta riga, ricavare il valore di «quadrato»: [20 – (12 + 6)] / 2 = 1.

Oppure: procedere per ipotesi e deduzione, ad esempio osservare la seconda riga che è composta da tre cerchi e una stella; attribuire al cerchio un valore, per esempio 1. Sostituendo ai cerchi il valore assegnato, si ricava il valore della stella (in questo caso, 30 – 3 = 27), che deve essere confrontato con il totale della seconda colonna. Effettuando altri tentativi e confronti, con successive esclusioni, dedurre il valore del cerchio, che è 6, e il valore della stella, che è 12. Dalla terza colonna ricavare il valore del triangolo: [34 – (12 + 12 + 6)] = 4.

A questo punto, si ottiene immediatamente il valore del quadrato.

**Punteggio 4** : Risposta corretta (cerchio: 6, stella: 12, quadrato: 1, triangolo: 4) con descrizione del procedimento utilizzato

**Livello:** 5, 6, 7

**Origine:** Rozzano

## 12. LA SCATOLA DI CUBI (Cat. 6, 7)

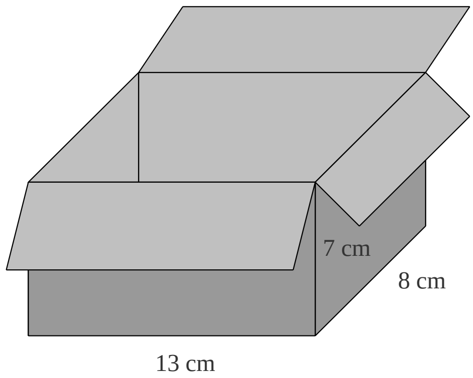
Francesco ha una scatola a forma di parallelepipedo rettangolo di dimensioni interne 13 cm, 8 cm e 7 cm.

Egli dispone di molti cubi di legno, alcuni con lo spigolo di 2 cm, altri di 1 cm.

Francesco vuole riempire completamente la scatola con il minimo numero possibile di cubi.

**Quanti cubi di ciascun tipo deve utilizzare?**

**Spiegate come avete trovato la vostra risposta.**




**ANALISI A PRIORI**

**Ambito concettuale**

- Geometria: visualizzazione spaziale; cubo e parallelepipedo
- Grandezze e misura: concetto di volume; volume del cubo e del parallelepipedo; unità di misura per i volumi
- Aritmetica: divisibilità, numeri pari e dispari

**Analisi del compito**

- Rendersi conto che non si può riempire completamente la scatola utilizzando unicamente i cubi con lo spigolo di 2 cm, anche se dividendo il volume della scatola per il volume di un cubetto di 2 cm di lato, si ottiene un numero intero (728 : 8 = 91).
- Constatare che si possono mettere al massimo 72 cubi di lato 2 cm nella scatola (6 x 3 x 4 = 72).
- Rendersi conto che per riempire la scatola si devono aggiungere dei cubi di 1 cm di lato in lunghezza e in altezza.
- Si possono prevedere 2 metodi per trovare il numero dei cubi di 1 cm di lato:

  calcolare il volume del parallelepipedo (728 $cm^3$) e quello occupato dai cubi di lato 2 cm (72 x 8=576 $cm^3$), fare la differenza (728-576) e trovare 152 $cm^3$ che è il volume occupato dai cubi di lato 1 cm; ricavare che 152 esprime anche il numero di tali cubi;

  oppure, contare direttamente i cubi (es. 7 x 8 + 13 x 8 – 8 = 152) utilizzando ad esempio la nozione di numero pari e dispari, a ciascun lato di misura dispari corrisponde la presenza di cubi di 1 cm di lato.

**Punteggio 4** : Risposta corretta (72 cubi di lato 2 cm; 152 cubi di lato 1 cm) con spiegazione chiara

**Livello:** 6, 7

**Origine:** Lussemburgo

## 13. PALLONE DA CALCIO (Cat. 6, 7, 8)

Un pallone da calcio è formato da 12 pentagoni regolari e da 20 esagoni regolari tenuti insieme da cuciture.
I loro lati misurano tutti 4,5 cm.

**Qual è la lunghezza totale delle cuciture?**

**Spiegate come avete fatto a trovare la vostra risposta.**

### ANALISI A PRIORI

**Ambito concettuale**

- Geometria: forme geometriche, pavimentazione (3D)
- Grandezze e misura: perimetro, unità di lunghezza

**Analisi del compito**

- Rendersi conto che il pallone « sferico » è assimilabile ad un poliedro (icosaedro troncato) e quindi che ogni pezzo è necessariamente attaccato ad altri lungo i suoi lati.
- Comprendere che ogni lato è cucito con un altro, dunque che il numero totale dei lati dovrà essere diviso per due per ottenere il numero delle cuciture.
- Determinare il numero delle cuciture contando tutti i lati dei poligoni e dividendo tale numero per 2:
  (12 x 5 + 20 x 6) : 2 = 90.

Oppure: determinare il numero di cuciture a partire dall'analisi del disegno, constatando che a ciascun pentagono sono associati 5 esagoni, dunque 12x5 cuciture, e che ciascun esagono possiede 3 cuciture con un altro esagono, cioè [(20 x 3) : 2] cuciture; in totale (12 x 5) + (20 x 3) : 2= 90.

L'utilizzazione di diverse procedure di calcolo permette di controllare le risposte ottenute.

- Calcolare la lunghezza della cucitura: 90 x 4,5 cm, cioè 405 cm.

**Punteggio 4** : Risposta corretta (405 cm) con spiegazioni complete del procedimento seguito (calcolo del numero delle cuciture, calcolo della lunghezza totale delle cuciture)

**Livello:** 6, 7, 8

**Origine:** Belgique

## 14. I NASTRI (Cat. 7, 8, 9)

Anna, Beatrice, Claudia e Daniela hanno ciascuna un nastro.

Si divertono a metterli uno di seguito all'altro, facendone combaciare le estremità. In questo modo:

- Anna, Beatrice e Claudia ottengono «un nastro» di 162 cm.
- Anna, Beatrice e Daniela ottengono «un nastro» di 175 cm.
- Anna, Claudia e Daniela ottengono «un nastro» di 156 cm.
- Beatrice, Claudia e Daniela ottengono «un nastro» di 170 cm.

**Chi tra Anna, Beatrice, Claudia e Daniela ha il nastro più lungo?**

**Qual è la lunghezza di ogni nastro?**

**Spiegate il vostro ragionamento.**

---

**ANALISI A PRIORI**

**Ambito concettuale**

- Aritmetica: le quattro operazioni
- Algebra: risoluzione di un sistema di equazioni o abbozzo di un ragionamento «retorico»

**Analisi del compito**

- Leggere attentamente l'enunciato per comprendere che tutti i nastri fittizi sono composti da tre dei quattro nastri dati e che in ciascuno dei casi ne manca uno.
- I 13 cm di differenza tra il primo nastro fittizio A + B + C = 162 cm e il secondo A + B + D = 175 cm sono dovuti alla sostituzione di C con D. Se ne può quindi dedurre che D misura 13 cm in più di C.

  Nello stesso modo si trova che C misura 19 cm in meno di B, che B misura 14 cm in più di A e che, confrontando il primo e l'ultimo nastro, D misura 8 cm in più di A.
- Una sintesi di tre di questi quattro confronti, eseguita graficamente disegnando dei nastri affiancati con un'origine comune, o per sostituzione (se D = C + 13 e se C = B – 19 allora D = (B – 19) + 13 = B – 6, etc.), permette di constatare che le lunghezze dei nastri sono nell'ordine :

  C A = C+5 D= C+13 B= C + 19.
- Utilizzando queste relazioni ed una qualunque di quelle date nel testo, determinare la lunghezza di C e quindi tutte le altre lunghezze.
- Oppure: trovare algebricamente la lunghezza di ciascun nastro risolvendo il sistema che traduce le quattro indicazioni:

  A + B + C = 162

  A + B + D = 175

  A + C + D = 156

  B + C + D = 170 la cui soluzione è A = 51, B = 65, C = 46 e D = 59.

Oppure: procedere aritmeticamente per tentativi successivi fissando arbitrariamente, per esempio, la lunghezza di B a 70 cm e calcolando le altre secondo i confronti precedenti: A = 56, C = 51 e D = 64. Se si addizionano questi valori per A + B + C si trova 177, che supera di 15 il valore dato (162). Si deve dunque togliere 5 (15 :3) da ciascuno di questi numeri per arrivare alla risposta esatta.

Oppure: constatare che la somma delle lunghezze dei quattro nastri fittizi, dove ciascun nastro compare tre volte, è 663 (3A + 3B + 3C + 3D = 663) e che, di conseguenza, i quattro nastri reali hanno una lunghezza totale in cm di 663 : 3 = 221. Per differenza si trova allora che D = 221 – 162 = 59, etc.

**Punteggio 4** : Risposta corretta ad entrambe le domande (Beatrice ha il nastro più lungo; A=51 cm, B=65 cm, C=46 cm, D=59 cm) con spiegazione chiara

**Livello**: 7, 8, 9

**Origine**: Israele

## 15. LA MANO NEL SACCO (Cat. 7, 8, 9 10)


Alla fiera del paese, il proprietario di un baraccone propone ai passanti il gioco seguente:
«*Datemi un euro ed estraete una sola pallina da un sacco a vostra scelta.*
*Se la pallina è rossa, vincerete un orso di peluche!*»

Nel sacco A, ci sono 6 palline rosse e 10 palline bianche.

Nel sacco B, ci sono 9 palline rosse e 14 palline bianche.

Tutte le palline sono della stessa grandezza, dello stesso peso e dello stesso materiale.

I sacchi non sono trasparenti e non si possono vedere le palline che contengono, vi si può solo infilare la mano per estrarre una pallina.

Voi avete solo un euro in tasca e vorreste vincere un orso.

**Da quale sacco provereste ad estrarre una pallina?**

**Spiegate la vostra risposta.**

---

### ANALISI A PRIORI

**Ambito concettuale**

- Probabilità intuitive
- Aritmetica: proporzionalità, rapporti

**Analisi del compito**

- Comprendere che bisogna scegliere uno dei due sacchi (i cui contenuti sono differenti), che bisogna sperare di «estrarre una pallina rossa» dal sacco scelto, cosa che conduce anche a «non estrarre una pallina bianca».
- Comprendere che non bisogna semplicemente confrontare i numeri delle palline rosse (9 > 6), e scegliere il sacco B perché ne contiene di più, o confrontare i numeri delle palline bianche (14 > 10), e scegliere il sacco A perché si rischia meno di estrarre una pallina bianca (perdente). L'abbandono di questa concezione dovrebbe appoggiarsi, per esempio, sulla contraddizione tra i due procedimenti che ne derivano:

  «estrarre una pallina rossa dal sacco dove ce ne sono di più» conduce a scegliere il sacco B, da una parte

  «estrarre una pallina bianca dal sacco dove ce ne sono di meno» porta a scegliere il sacco A, dall'altra.
- Tener conto simultaneamente dei quattro numeri dati delle palline (perché non è sufficiente considerare separatamente la coppia (6; 9) e non (10; 14) o l'inverso).

  In questo contesto, secondo le età, gli allievi si collocano spontaneamente in un quadro additivo. Si incontrano generalmente due procedimenti errati:

  1- Calcolare gli scarti tra i numeri di palline di uno stesso sacco (4 palline bianche più delle rosse per A e 5 per B). Decidere allora sulla scelta di A «perché in B c'è un maggior numero di palline bianche in più che in A».

  2- Calcolare le variazioni dei numeri di palline di uno stesso colore da un sacco all'altro (+ 3 rosse e + 4 bianche da A a B). Concludere così per la scelta di A «perché da A a B, si aggiungono più palline bianche che rosse».

  In questo quadro additivo, la conclusione che il sacco A è più vantaggioso può sembrare fare appello ad una intuizione probabilista: aggiungendo più palline bianche che rosse per passare da un sacco all'altro, si aumenta il peso relativo delle bianche e si ha più «rischio» di estrarre una pallina perdente. Ma questo ragionamento di natura pre-probabilista non è rilevabile a meno che l'allievo non spieghi come è giunto alla sua conclusione, cosa che non è frequente.

  Questo ragionamento additivo può essere invalidato applicandolo ad altri esempi di sacchi fittizi per i quali, con un approccio intuitivo, si può stimare che le possibilità di vincita siano le stesse.

Per esempio, in un sacco A', «doppio-sacco A», contenente 12 palline rosse e 20 bianche, ci sono tante possibilità di vincita che con A. Ma, secondo il procedimento 1, si avrebbero 8 «palline bianche in più delle rosse», mentre nel sacco B se ne hanno 5. Si opterebbe allora per il sacco B piuttosto che A' o A, contrariamente alla scelta precedente.

La conclusione che A è più vantaggioso, che si basa, secondo il procedimento 2, sulle variazioni delle palline dello stesso colore tra A e B (+ 3 rosse e + 4 bianche in B) e che fa ugualmente apparire un aumento superiore di bianche in rapporto alle rosse, è da rifiutare come in precedenza.

- Mettersi in un quadro moltiplicativo o di proporzionalità e comprendere che occorre considerare le quantità relative di palline rosse in rapporto alle bianche o in rapporto all'insieme delle palline contenute in ciascuno dei sacchi.
- Scegliere il sacco che dà una migliore «possibilità» di vittoria, cioè, in una visione probabilista, scegliere quello che contiene la più alta proporzione di palline rosse.
- Per confrontare i due sacchi possono essere considerati due tipi di rapporti.

  Sia, per ciascuno dei sacchi, il rapporto tra il numero delle palline rosse e quello delle bianche: 6/10 in A e 9/14 in B. Per confrontarli, si possono esprimere in decimali: 0,6 per A e 0,643 per B, o con frazioni equivalenti: 42/70 per A e 45/70 per B o in percentuali: 60 % per A e 64,3 % per B. Da qui la scelta di B.

  Sia, per ciascun sacco, il rapporto del numero delle palline rosse su tutte (probabilità di estrarre una pallina rossa): 6/16 = 0,375 = 138/368 = 37,5 % per A e 9/23 = 0,391 = 144/368 = 39,1 % per B. Da cui ancora la scelta di B.
- Esprimere la risposta senza confondere una risposta probabilista del genere «numero di possibilità su ... di estrarre una pallina rossa» con una risposta riferentesi ai rapporti rosse/bianche. Per esempio, è corretto dire « ... perché si ha 37,5 possibilità su 100 di estrarre una pallina rossa in A e 39,1 possibilità su 100 in B», ma non è corretto dire «60 possibilità su 100 in A e 64,3 possibilità su 100 in B».

  Si noti che l'uso della parola «possibilità» è sorgente di ambiguità. Non ha lo stesso senso in «avere più possibilità di estrarre una pallina rossa in B che in A» che è una valutazione qualitativa, e in «ho 6 possibilità su 16 di estrarre una pallina rossa in A» che è un apprezzamento quantitativo della probabilità nella quale le «possibilità» sono assimilate alle palline vincenti, cosa che può essere sorgente di confusione quando si annuncia: «ho 37,5 possibilità su100 di estrarre una pallina rossa da A».

**Punteggio 4** : Soluzione esatta (il sacco B) con spiegazione del legame esistente tra i rapporti calcolati e le «possibilità di vincita» espresse correttamente

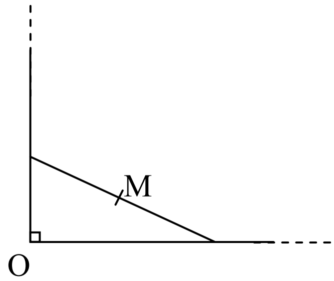
**Livello:** 7, 8, 9, 10

**Origine:** Gruppo «probabilità»

## 16. UNA FIGURA NOTA (Cat. 7, 8, 9, 10)

Pietro ha disegnato con la sua squadra un angolo retto di vertice O. Poi ha posizionato il suo righello in modo che le due estremità siano sui due lati dell'angolo. A questo punto segna sul suo foglio la posizione del punto medio M del righello.

Sistemando il suo righello in posizioni diverse, ma sempre con le estremità sui due lati dell'angolo, Pietro osserva che i punti M così tracciati sembrano essere situati su una figura che conosce.




**Descrivete questa figura e disegnatela.**

**Spiegate la vostra risposta.**

---

**ANALISI A PRIORI**

**Ambito concettuale**

- Geometria: diagonali di un rettangolo, circonferenza, figura come insieme di punti, luogo geometrico

**Analisi del compito**

- Procedere per semplice "manipolazione", costruendo un listello di cartone con un buco nel suo centro e creando materialmente un angolo retto che permetta di appoggiarvi il listello di cartone. E' sufficiente allora infilare la punta di una matita nel buco per vedere che viene tracciato man mano un quarto di circonferenza.

Oppure:

- disegnare un angolo retto con i lati più lunghi del righello, fare alcuni tentativi con il righello,
- individuare la traccia di un arco di circonferenza centrata sul vertice dell'angolo, di raggio uguale alla metà della lunghezza del righello;
- spiegare che OM è costante poiché è la mediana che esce dall'angolo retto del triangolo rettangolo formato con il righello, ed è uguale quindi alla metà dell'ipotenusa;

  oppure: osservare che M è il centro del rettangolo costruito su O e sui punti che corrispondono agli estremi del righello;
- dedurre che OM è la metà della lunghezza di una diagonale, mentre l'altra diagonale è formata dal righello;
- concludere che OM è costante e che M è sulla circonferenza di centro O e di raggio uguale alla metà della lunghezza del righello;
- notare che in ogni caso può essere ottenuto solo il quarto di circonferenza contenuto nell'angolo retto (primo quadrante).

**Punteggio 4** : Risposta corretta (il quarto di circonferenza "nel primo quadrante") con disegno e spiegazione

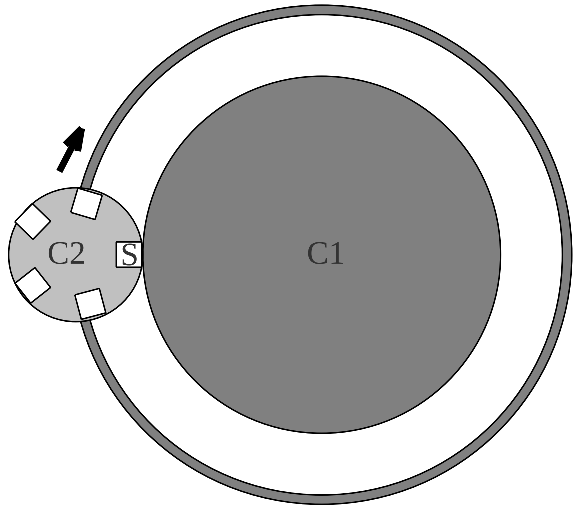
**Livello:** 7, 8, 9, 10
**Origine:** Franche-Comté

**17. LA GIOSTRA** (Cat. 8, 9, 10)

Alla sagra di San Fortunello, la giostra preferita dai bambini è formata da due piattaforme circolari come in figura.

La piattaforma C1, di diametro 8 m, è fissa; la piattaforma C2, di diametro 3 m sulla quale si siedono i bambini, ruota attorno alla C1 in senso orario, girando contemporaneamente attorno al proprio asse.

Leo è seduto sul seggiolino S.




**Qual è il minimo numero di giri completi sul proprio asse che deve fare la piattaforma C2 mentre ruota attorno a C1, affinché Leo si ritrovi nella stessa posizione di quella di partenza come sul disegno?**

**Spiegate come avete trovato la risposta.**

---

**ANALISI A PRIORI**

**Ambito concettuale**

- Geometria: circonferenza
- Grandezze e misura: lunghezza di una circonferenza e sua misura
- Aritmetica: minimo comune multiplo

**Analisi del compito**

- Capire in che modo il cerchio C2 ruota intorno al proprio centro mentre gira sul cerchio C1. Riconoscere la posizione di partenza dalla coincidenza del punto S di C2 con il punto T che si trova in C1 nel punto di tangenza dei due cerchi e comprendere che il punto S ruota con il cerchio C2.
- Capire che il punto S si trova di nuovo a contatto di C1 dopo un giro completo di C2 e coincide con il punto $T_1$ tale che l'arco $TT_1$ abbia lunghezza $3\pi$.
- Calcolare la lunghezza della circonferenza di C1 ($8\pi$) e rendersi conto che quando C2 ha percorso tutta la circonferenza di C1, il punto S non ritorna al punto di partenza T perché 8 non è un multiplo di 3.
- Capire quindi che occorre determinare il più piccolo multiplo di $3\pi$ che sia multiplo anche di $8\pi$, cioè il m.c.m. ($3\pi$, $8\pi$), ovvero $24\pi$.
- Concludere quindi che la prima volta che Leo sarà di nuovo nella posizione di partenza (S in T), la piattaforma C2 avrà fatto 8 giri completi ($24\pi:3\pi = 8$).

**Punteggio 4** : Risposta corretta (8 giri completi) con spiegazione esauriente

**Livello**: 8, 9, 10

**Origine:** Parma

## 18. L'INTERROGAZIONE (Cat. 8, 9, 10)

Il professor Medioevo insegna storia ad una classe di 20 alunni i cui nomi sono numerati da 1 a 20 nel suo registro.

All'inizio di ogni lezione, egli prende il suo libro preferito che ha esattamente 100 pagine e lo apre a caso in modo da vedere due pagine numerate. Calcola la somma delle cifre del numero della pagina di sinistra, poi la somma delle cifre del numero della pagina di destra e annota questi due numeri.

Interroga quindi i due allievi i cui numeri sul registro corrispondono ai numeri annotati.

Dopo diversi mesi Anna si rende conto di essere interrogata più spesso degli altri, mentre alcuni dei suoi compagni non sono mai interrogati.

**Quali sono gli allievi che non saranno mai interrogati?**

**Quale allievo ha più possibilità di essere interrogato?**

**Spiegate il vostro ragionamento.**

---

**ANALISI A PRIORI**

**Ambito concettuale**

- Aritmetica: addizione, inventario
- Nozione di frequenza
- Nozione di probabilità

**Analisi del compito**

- Rendersi conto che la probabilità per un allievo di essere interrogato è tanto più grande quanto maggiore è il numero delle pagine che determinano il suo numero di registro.
- Contare in quanti modi diversi si possono ottenere i numeri da 1 a 20 sommando le cifre dei numeri da 2 a 99 (ad esempio, con una tabella come quella sotto riportata):

| somme (numero di registro) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| occorrenze | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 |

- Osservare che il numero 9 corrisponde al più grande numero di pagine (10) e che al contrario i numeri 19 e 20 non potranno mai essere ottenuti.

**Punteggio 4** : Risposte corrette (gli allievi aventi numeri 19 e 20 non saranno mai interrogati; l'allievo numero 9 ha la maggiore possibilità di essere interrogato) con spiegazioni esaurienti sulla relazione tra il numero di pagine che danno uno stesso numero e la probabilità che l'allievo con quel numero sia interrogato

**Livello**: 8, 9, 10

**Origine:** Parma

## 19. UN OCCHIO SULLE NOSTRE ETÀ (Cat. 8, 9, 10)

La mamma dice al figlio che sta per festeggiare il suo compleanno:

«La tua età e la mia si esprimono ora con le stesse due cifre. Ma ciò che è sorprendente è che la tua età oggi è il prodotto delle due cifre dell'età che io avevo quando sei nato!».

**Quale età possono avere oggi mamma e figlio?**

**Spiegate il vostro ragionamento.**

---

**ANALISI A PRIORI**

**Ambito concettuale**

- Aritmetica: distinzione fra cifra e numero; calcolo mentale
- Logica: analizzare e comprendere un testo; organizzare una strategia di ricerca tenendo conto delle diverse variabili presenti in un testo; ricorsività

**Analisi del compito**

- Comprendere che le età attuali della mamma e del figlio corrispondono a numeri formati da due cifre, entrambe diverse da zero (per la seconda condizione).
- Scoprire che le cifre dell'età del figlio e della mamma non possono essere uguali, altrimenti la mamma avrebbe la stessa età del figlio. Inoltre, la prima cifra dell'età del figlio deve essere minore della seconda cifra, altrimenti la mamma risulterebbe, oggi, più giovane di suo figlio.
- Rendersi conto che la differenza tra le due età di oggi è l'età della mamma alla nascita del figlio.
- Procedere con qualche tentativo non organizzato per capire bene i dati precedenti e distinguere le situazioni "oggi" e "alla nascita del figlio". Per esempio:

| oggi | | "alla nascita" | |
|---|---|---|---|
| figlio | mamma | mamma | test del prodotto delle cifre |
| 12 | 21 | 9 | no, perché 9 è di una sola cifra |
| 25 | 52 | 27 | no: 2x7 ≠ 25 |
| ..... | | | |

- Constatare che occorreranno molti tentativi e che è necessario organizzarli. Per esempio:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 13 | 31 | 18 | 1 x 8 ≠ 18 |
| 14 | 41 | 27 | **2 x 7 = 14 soluzione da accettare** |
| 15 | 51 | 36 | no 3 x 6 ≠ 15 |
| ... | | | |
| 18 | 81 | 63 | **6 x 3 = 18** soluzione da discutere |
| 19 | 91 | 72 | etc. |

  In questo caso, bisogna provare tutte le età del figlio nelle quali le cifre delle unità valgono almeno 2 di più delle cifre delle decine. Ci sono 28 tentativi da fare.
- Per ridurre le ricerche, rendersi conto che le differenze di età sono i multipli di 9: 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72 e 81 e che tali numeri danno luogo a soli 4 prodotti possibili 8 = 1x8 = 8x1, 14 = 2 x 7, ... 18=3x6= .. e 20 = 4 x 5. Se si elimina l' "8" che ha solo una cifra e il 20 che contiene uno "0", restano da provare solo le età di 14 anni e di 18 anni per il figlio.
- Dall'uno o dall'altro dei metodi scelti, dedurre che le due soluzioni da esaminare sono rispettivamente 41 anni per la mamma e 14 anni per il figlio oppure 81 anni per la mamma e 18 anni per il figlio.
- Ritenere la prima come accettabile e la seconda come discutibile (vedere il Guinness Book): una donna non può più avere bambini a 63 anni.

**Punteggio 4** : 4 Risposta corretta (41, 14 e 81, 18) con spiegazione completa o realizzazione di una tabella in modo da escludere altre possibili soluzioni e messa in dubbio della seconda soluzione

oppure risposta 41, 14 con spiegazione completa e giustificazione dell'eliminazione di 81, 18

**Livello:** 8, 9, 10

**Origine:** Rozzano

## 20. CONFRONTO DI TRIANGOLI (Cat. 9, 10)

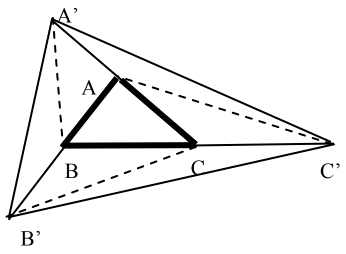
Per cominciare, considerate un triangolo qualunque ABC.

Poi prolungate:

il segmento AB dalla parte di B di un segmento della stessa lunghezza di AB ottenendo così il punto B';

il segmento BC dalla parte di C di un segmento della stessa lunghezza di BC ottenendo così il punto C';

il segmento CA dalla parte di A di un segmento della stessa lunghezza di CA ottenendo così il punto A'.




**Confrontate le aree dei triangoli AB'C, BC'A e CA'B con quella del triangolo ABC.**

**Qual è il rapporto tra le aree dei due triangoli A'B'C' e ABC ?**

**Spiegate come avete trovato le vostre risposte.**

---

**ANALISI A PRIORI**

**Ambito concettuale**

- Geometria: triangolo
- Grandezze e misura: area del triangolo, confronto di aree
- Logica: applicazione di un teorema

**Analisi del compito**

- Ricordare che l'area di un triangolo vale la metà del prodotto della lunghezza di un lato per quella dell'altezza corrispondente.
- Considerare il triangolo ACB' e rendersi conto che è formato dai due triangoli CBA e CBB' che hanno la stessa area poiché hanno la stessa altezza rispetto ai lati uguali AB e BB'. In modo analogo, constatare che il triangolo BAC' è formato dai due triangoli ACB e AC'C aventi stessa area, e che il triangolo CBA' è formato dai due triangoli BAC e BA'A aventi anch'essi stessa area. Concludere quindi che ciascuno dei triangoli ACB', BAC', CBA' ha area doppia di quella di ACB.
- Decomporre il triangolo A'C'B' in 7 triangoli. Poi osservare che, utilizzando lo stesso tipo di ragionamento del punto precedente, i triangoli B'BC e B'CC' hanno la stessa area, uguale a quella di ACB, così come C'CA e C'AA' e anche A'AB et A'BB'. Dedurre che si hanno allora 7 triangoli di area uguale a quella di ACB che compongono il triangolo A'C'B'. Il rapporto richiesto è quindi 7.

**Punteggio 4** : 4 Le due risposte corrette (i triangoli ACB', BAC', CBA' hanno stessa area (doppia di quella di ACB); il rapporto delle aree è 7) con spiegazioni esaurienti

**Livello:** 9, 10

**Origine:** Franche-Comté

## 21. MESSAGGI IN CODICE (Cat. 10)

Un gruppo di *boy scouts* avanza in esplorazione e ciascuno di essi porta con sé tre zappe sulle spalle. Il gruppo è osservato da tre spie, A, B e C. Le spie informano i loro rispettivi capi sull'esatto numero dei componenti il gruppo di *boy scouts* in esplorazione, per mezzo di messaggi in codice.

Messaggio di A: *Vedo avanzare 100101 boy scout ciascuno dei quali ha con sé 11 zappe*

Messaggio di B: *Ho visto passare una lepre a 10 zampe e 211 boy scouts*

Messaggio di C: *Aiutandomi con le 10 dita di una mano, ho contato 122 boy scouts.*

**Quali sono i codici utilizzati da A, B, e C per comunicare il numero dei *boy scouts*?**

**Quanti sono i *boy scouts* del gruppo che avanza in esplorazione?**

**Giustificate le vostre risposte.**

---

**ANALISI A PRIORI**

**Ambito concettuale**

- Aritmetica: sistemi di numerazione in basi diverse

**Analisi del compito**

- Comprendere che le informazioni numeriche contenute nei messaggi delle tre spie, se interpretate utilizzando l'usuale sistema di numerazione in base 10, sono contraddittorie.
- Ipotizzare quindi l'uso, da parte delle tre spie, di sistemi di numerazione in basi diverse.
- Capire che il sistema di numerazione usato da A si serve della base 2, dal momento che l'uguaglianza: $3_{\text{(dieci)}} = 11_{(x)}$ è verificata solo per $x = 2_{\text{(dieci)}}$.
- Dedurre che il numero dei *boy scouts* (secondo quanto riferito da A) è 37, effettuando la "conversione" numerica dalla base due alla base dieci: $100101_{\text{(due)}} = 1*2^0+0*2^1+1*2^2+0*2^3+0*2^4+1*2^5 = 37_{\text{(dieci)}}$
- Capire che il sistema di numerazione usato da B si serve della base 4, dal momento che l'uguaglianza: $4_{\text{(dieci)}} = 10_{(x)}$ è verificata solo per $x = 4_{\text{(dieci)}}$.
- Verificare che anche secondo quanto riferito da B, il numero dei *boy scouts* è ancora 37, effettuando la "conversione": $211_{\text{(quattro)}} = 1*4^0+1*4^1+2*4^2= 37_{\text{(dieci)}}$
- Capire infine che il sistema di numerazione usato da C si serve della base 5, dal momento che l'uguaglianza: $5_{\text{(dieci)}} = 10_{(x)}$ è verificata solo per $x = 5_{\text{(dieci)}}$.
- Verificare che anche secondo quanto riferito da C, il numero dei *boy scouts* è ancora 37, effettuando la "conversione": $122_{\text{(cinque)}} = 2*5^0+2*5^1+1*5^2 = 37_{\text{(dieci)}}$
- Fornire le risposte corrette: le spie utilizzano ciascuna un sistema di numerazione diverso: A la base 2, B la base 4, C la base 5; i *boy scouts* sono 37.

**Punteggio 4** : Risposte corrette (le spie utilizzano ciascuna un sistema di numerazione diverso: A la base 2, B la base 4, C la base 5; i *boy scouts* sono 37) con spiegazione completa

**Livello:** 10

**Origine:** Parma